

## حاصل الضرب الديكارنى

## الدرس الأول

يسمى (أ، ب) زوج مرتب ويكون  
 أ ← المسقط الأول  
 ب ← المسقط الثانى

## الزوج المرتب

1.  $\{أ، ب\} = \{ب، أ\}$  أى أن الترتيب غير مهم فى المجموعة
2.  $\{أ، ب\} \neq \{ب، أ\}$  ولكن مهم داخل الزوج المرتب إذا كان  $أ \neq ب$
3. يمكن تكرار عنصر فى الزوج المرتب ولكن لا يمكن التكرار فى المجموعة (٥، ٥) ممكنة ولكن  $\{٥، ٥\}$  غير ممكنة
4. يوجد مجموعة خالية  $\emptyset$  ولكن لا يوجد زوج مرتب خالى

## الفرق بين الزوج المرتب والمجموعة

➤ المسقط الأول = المسقط الأول  
 ➤ المسقط الثانى = المسقط الثانى

## نساوى زوجين مرتبين

## مثال (١)

(٢) إذا كان (س، ٥) = (٣، ص)  
 الحل  
 فإن س = ٣ ص = ٥

(١) إذا كان (أ، ب) = (٢، ٣)  
 الحل  
 فإن أ = ٢ ب = ٣

## مثال (٢) أوجد قيم س، ص فى كل مما يأتى

(١) (س + ١، ص<sup>٢</sup>) = (٥، ٩)  
 الحل

ص<sup>٢</sup> = ٩

ص =  $\pm\sqrt{٩}$

ص =  $\pm ٣$

س + ١ = ٥

س = ٥ - ١

س = ٤

(١) (س + ١، ٣ - ص) = (٥، ١)  
 الحل

٣ - ص = ١

ص = ٣ - ١

ص = ٢

س + ١ = ٥

س = ٥ - ١

س = ٤



## تدريب

أوجد قيمة أ ، ب إذا كان : (١)  $(١ - ٢, ٧) = (٥, ٣ + ب)$

(٢)  $(٢٧, ٤) = (٣١, ٢ب)$

(٣)  $(١٣, ٢ب - ٥) = (٤, ٩)$

(٤)  $(٣٢, ٢) = (٥ب, ١٧)$   
الحل

$$\begin{aligned} ٣٢ &= ٥ب \\ ٥٢ &= ٥ب \\ ٣٢ &= ٥ب \\ ٢ &= ٥ب \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ٢ &= ١٧ \\ \text{بالتربيع للطرفين} \\ ٤ &= ١ \end{aligned}$$

(٣)  $(١, ٥) = (٢ب, \frac{١}{٢})$   
الحل

$$\begin{aligned} ١ &= ٢ب \\ \text{بأخذ } \sqrt{\text{للطرفين}} \\ ١ &= ٢ب \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ٥ &= \frac{١}{٢} \\ ٥ \times ٢ &= ١ \\ ١٠ &= ١ \end{aligned}$$

## حاصل الضرب الديكارنى

إذا كان س ، ص مجموعتان غير خاليتان فإن :  
٥. س × ص = { (أ ، ب) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص }  
٦. س × ص = { (أ ، ب) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص }

## تعريف

إذا كان : س = { ١ ، ٢ } ، ص = { ٥ ، ٦ ، ٧ } يكون

(١) س × ص = { (١, ٥), (١, ٦), (١, ٧), (٢, ٥), (٢, ٦), (٢, ٧) }

(٢) ص × س = { (٥, ١), (٥, ٢), (٦, ١), (٦, ٢), (٧, ١), (٧, ٢) }

نلاحظ أن :

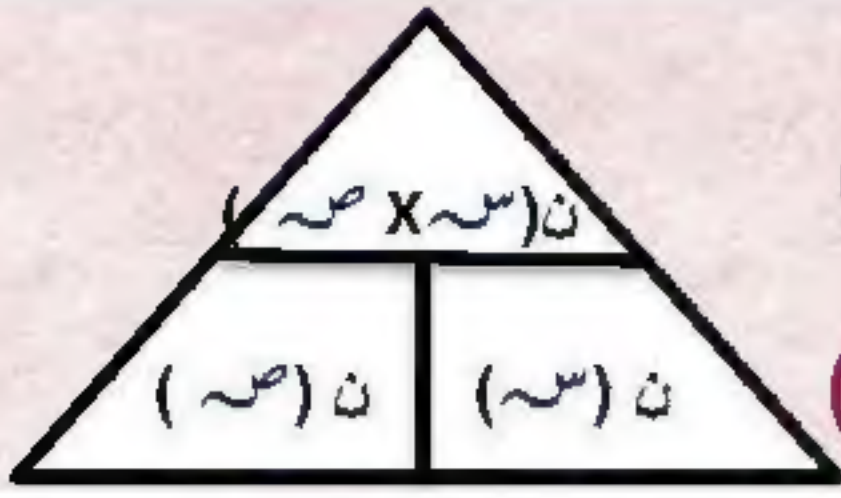
(١) س × ص ≠ ص × س

(٢) ن(س × ص) = ن(ص × س) = ٦ عناصر

(٣) س × س = { (١, ١), (١, ٢), (٢, ١), (٢, ٢) } = ٤ عناصر

لاحظ : ن(س × س) = ٢(٢) = ٤ عناصر





١.  $س \times س \neq س \times س$
٢.  $ن (س \times س) = (ن \times س) س$
٣.  $س \times س = س \times س = س \times س$
٤.  $ن (س \times س) = (ن \times س) س$

## ملاحظات

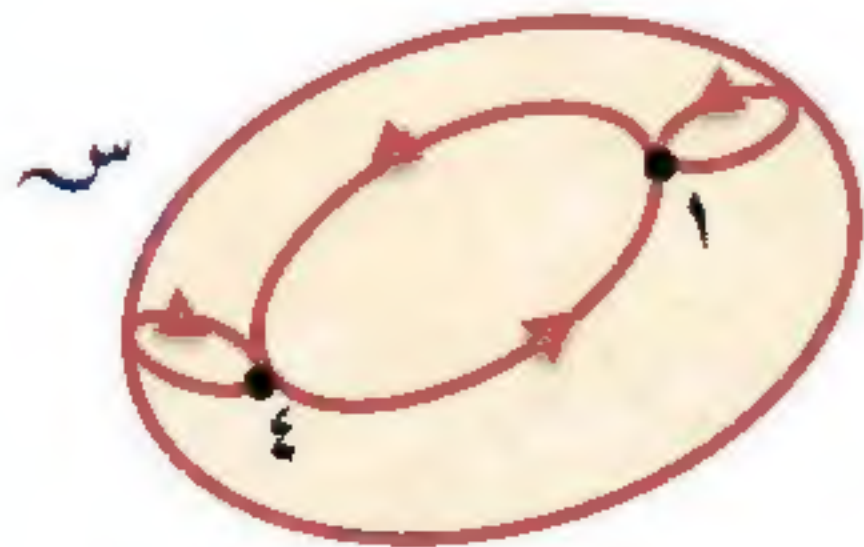
## الأمثلة

- (١) إذا كان:  $س = \{٢, ٣\}$ ،  $س = \{٤, ١\}$ ،  $ع = \{٦\}$   
أوجد (١)  $س \times س$   
(٢)  $س \times س$   
(٣)  $س \times ع$   
(٤)  $س^٢$   
(٥)  $س^٢$   
(٦)  $ع^٢$   
(٧)  $ن (س \times س)$ ،  $ن (س^٢)$ ،  $ن (س \times ع)$   
الحل

$$\begin{aligned} (١) س \times س &= س \\ (٢) س \times س &= س \\ (٣) س \times ع &= ع \\ (٤) س^٢ &= س \\ (٥) س^٢ &= س \\ (٦) ع^٢ &= ع \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (٧) ن (س \times س) &= ن (س) \\ ن (س^٢) &= ن (س) \\ ن (س \times ع) &= ن (س \times ع) \end{aligned}$$

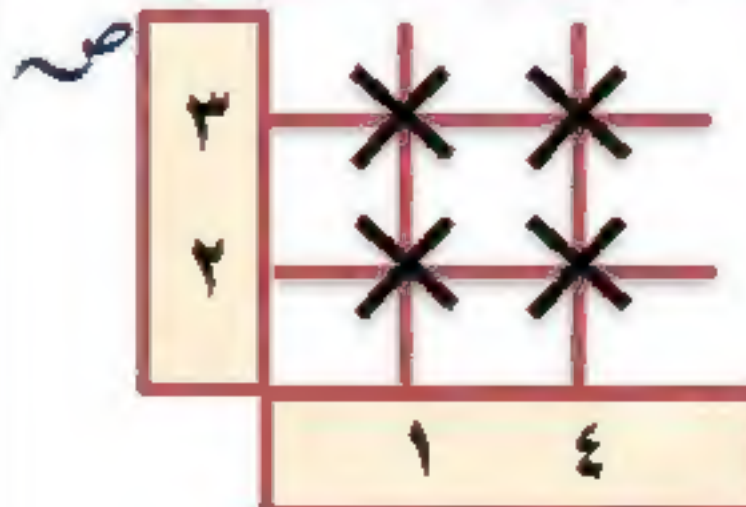
- (٢) إذا كان:  $س \times س = \{(٢, ١), (٣, ١), (٢, ٤), (٣, ٤)\}$   
أوجد (١)  $س$ ،  $س$   
(٢) وضح بمخطط سهمى  $س \times س$   
(٣) وضح بمخطط بياني  $س \times س$   
(٧) وضح بمخطط سهمى  $س^٢$



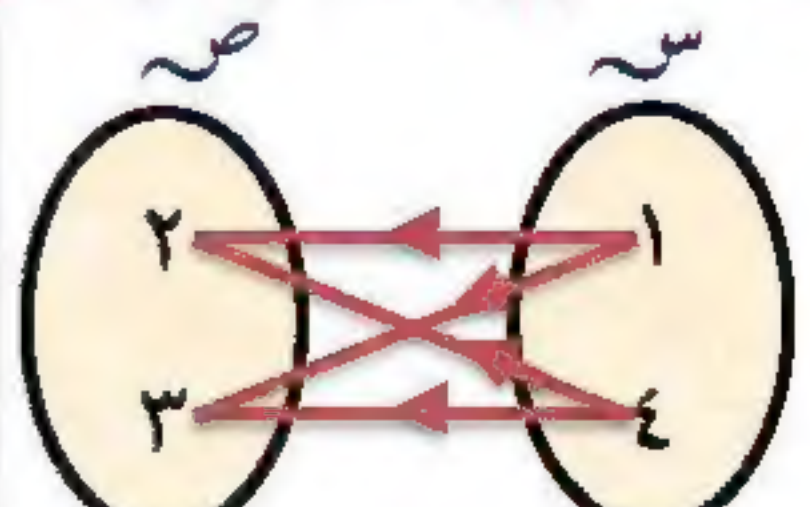
مخطط سهمى  $س^٢$

الحل

$$\begin{aligned} (١) س &= \{١, ٤\} \\ س &= \{٢, ٣\} \\ س^٢ &= \{(١, ١), (١, ٤), (٤, ١), (٤, ٤)\} \end{aligned}$$



مخطط بياني  $س \times س$



مخطط سهمى  $س \times س$



## تدريب

إذا كان :

$$\{ (٤, ٦), (١, ٦), (١, ٥), (٤, ٥) \} = \text{ص} \times \text{س}$$

أكمل ما يأتى :-

$$(١) \text{س} \times \text{ص} =$$

$$(٢) \text{س} =$$

$$(٣) \text{ص} =$$

$$(٤) \text{س}^٢ =$$

$$(٥) \text{ن} (\text{س}^٢) = \text{ن} (\text{ص}^٢) =$$

## (٣) هاهنا

$$\{٦, ٥, ٢\} = \text{ع} \quad \{٣, ٢\} = \text{ص} \quad \{١\} = \text{س} \quad \text{إذا كان :}$$

$$\text{أوجد : (١) } (\text{س} - \text{ص}) \times (\text{ص} - \text{ع})$$

$$(٢) \text{س} \times (\text{ص} \cap \text{ع})$$

$$(٣) (\text{س} \times \text{ص}) \cap (\text{س} \times \text{ع})$$

$$(٤) (\text{ع} - \text{س}) \times (\text{ص} \cap \text{ع})$$

$$(٥) (\text{س} \cap \text{ص}) \times \text{ص}$$

## الحل

$$(١) (\text{س} - \text{ص}) \times (\text{ص} - \text{ع}) = \{٣\} \times \{١\} = \{(٣, ١)\}$$

$$(٢) \text{س} \times (\text{ص} \cap \text{ع}) = \{١\} \times \{٢\} = \{(١, ٢)\}$$

$$(٣) (\text{س} \times \text{ص}) \cap (\text{س} \times \text{ع}) = \{(٣, ١), (٢, ١)\} \cap \{(٦, ١), (٥, ١), (٢, ١)\} = \{(٢, ١)\}$$

$$(٤) (\text{ع} - \text{س}) \times (\text{ص} \cap \text{ع}) = \{٦, ٥, ٢\} \times \{٢\} = \{(٦, ٢), (٥, ٢), (٢, ٢)\}$$

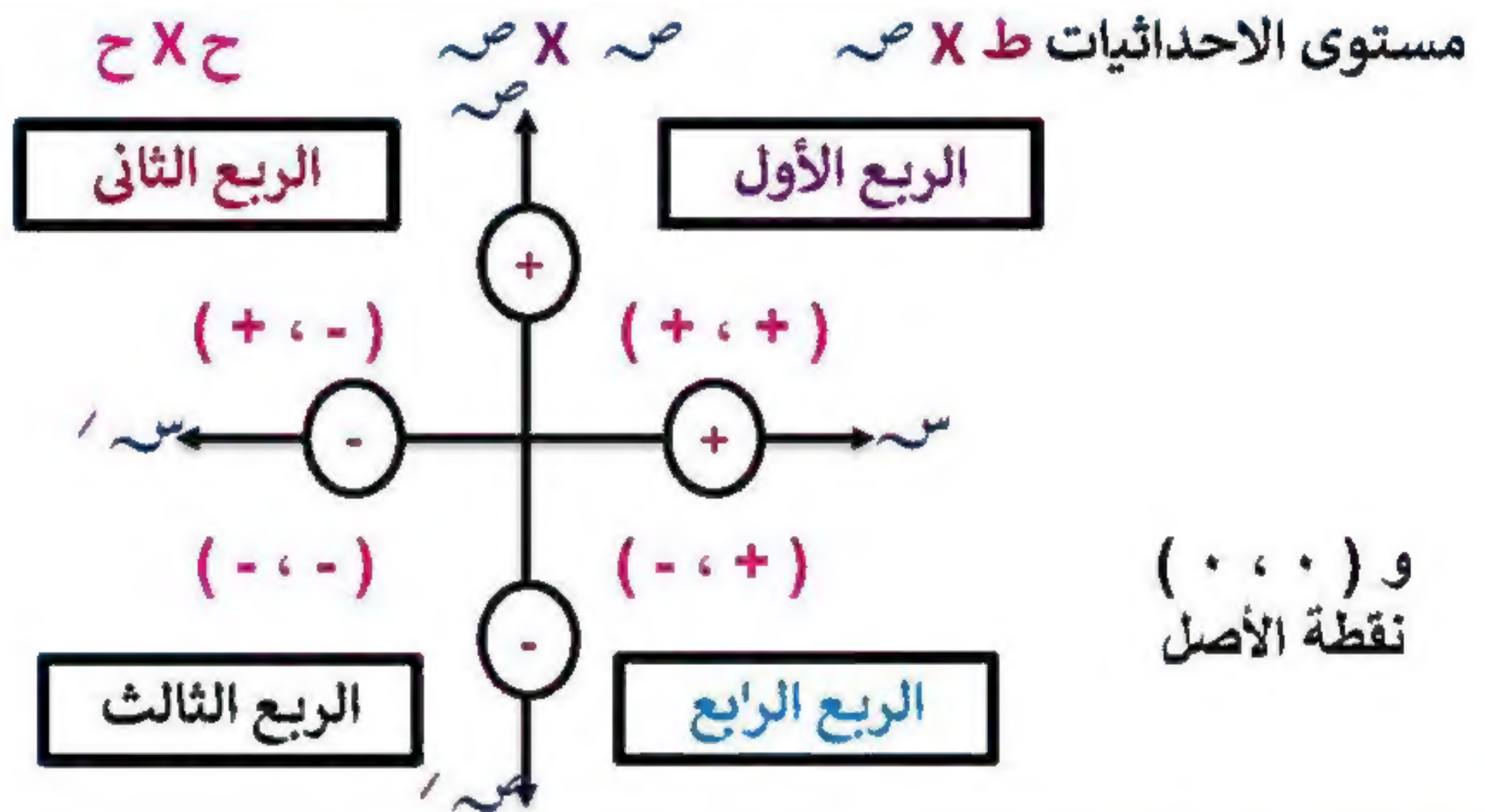
$$(٥) (\text{س} \cap \text{ص}) \times \text{ص} = \phi \times \text{ص} = \phi$$



## تدريب

إذا كان:  $\{1, 5\} = \text{ص}$ ،  $\{5\} = \text{ص}$ ،  $\{1\} = \text{ع}$   
 أوجد: (١)  $(\text{ص} \cap \text{ص}) \times \text{ع}$   
 (٢)  $(\text{ص} - \text{ص}) \times \text{ص}$   
 (٣)  $(\text{ص} - \text{ع}) \times (\text{ع} \cap \text{ص})$   
 (٤)  $(\text{ص} - \text{ص}) \times (\text{ص} \cup \text{ع})$

## الشبكة التربيعية المتعامدة



## مثال

على شبكة تربيعية متعامدة وضح عليها النقط التالية أ (٣، ٢)، ب (٢، ١-)، ج (٢-، ٣-)، د (١-، ١)، م (٠، ٣)، ك (١، ٠)، خ (١، ٠)

## الحل



الربع	النقطة
الأول	أ (٣، ٢)
الثاني	ب (٢، ١-)
الثالث	ج (٢-، ٣-)
الرابع	د (١-، ١)

م (٠، ٤) على محور السينات  
 ك (١، ٠) على محور الصادات

ملحوظة  
 (س، ٠) تقع على محور السينات  
 (ص، ٠) تقع على محور الصادات



## (٤) أكمل ما يأتى

- (١)  $(٢س + ١، ٣ص) = (٥، ٩)$  فإن  $س = \dots\dots\dots$  ،  $ص = \dots\dots\dots$
- (٢)  $(س^٢، ص^٢) = (٤، ٨)$  فإن  $س = \dots\dots\dots$  ،  $ص = \dots\dots\dots$
- (٣)  $(س - ١، ١١) = (٨، ٣ + ص)$  فإن  $س = \sqrt{٢ + ص}$  ،  $ص = \dots\dots\dots$
- (٤)  $\dots\dots\dots = \{١\} \times \{٥\}$
- (٥)  $\dots\dots\dots = \{٣\} \times \{٢\}$
- (٦)  $\dots\dots\dots = \phi \times \{١\}$
- (٧)  $ن(س \times ص) = ٨$  ،  $ن(س) = ٢$  فإن  $ن(ص) = \dots\dots\dots$
- (٨)  $ن(س^٢) = ٩$  ،  $ن(ص) = ٢$  فإن  $ن(س \times ص) = \dots\dots\dots$
- (٩)  $ن(س^٢) = ٢٥$  ،  $ن(س \times ص) = ١٥$  فإن  $ن(ص^٢) = \dots\dots\dots$
- (١٠)  $(١، ٣) \ni س \times ص \ni (١، ٣)$  فإن  $س = \dots\dots\dots$
- (١١)  $(٥-، ٤-)$  فى الربع  $\dots\dots\dots$  فى الربع  $(١-، ٢-)$
- (١٢)  $(٥، ب - ٧)$  تقع فى محور السينات فإن  $ب = \dots\dots\dots$
- (١٣)  $(٤، ٢ + ب)$  تقع على محور الصادات فإن  $ب = \dots\dots\dots$



## نمارين

(١)	أوجد قيمة س ، ص :-	(٢)	أكمل ما يأتى :-
(١)	$(س، ص) = (٢ - ص، ٥)$	(١)	إذا كان $(س + ٥، ٨) = (١، ٦ص + س)$ فإن : $٥س + ١ = \dots\dots\dots$
(٢)	$(س^٢، \frac{١}{٢}ص) = (٤ - ٢، ٢)$	(٢)	إذا كان $(٢س، ٤) = (٨، ١ + ص)$ فإن $\sqrt{٢س + ٢ص} = \dots\dots\dots$
(٣)	$(س^٢، \sqrt{٩}) = (٥، ص)$	(٣)	إذا كان $(س - ١، ١١) = (٨، ٣ + ص)$ فإن : $\sqrt{٢س + ٢ص} = \dots\dots\dots$
(٤)	$(\frac{س}{٣}، ٥) = (٩، \sqrt{ص})$	(٤)	$(٥، ٣ -)$ تقع فى الربع ..... لكن $(٤، ٣ -)$ تقع فى الربع .....
(٥)	$(س^٥، ص + ١) = (٣٢، \sqrt[٣]{٨ - ١})$	(٥)	$(س، ٧)$ تقع على محور الصادات فإن : $س = \dots\dots\dots$
(٦)	$(٩، ص + ٣) = (س^٢، ٤ -)$	(٦)	$(٨، ٤ - ١)$ تتبع على محور الصادات فإن : $١ = \dots\dots\dots$
(٧)	$(س^٢، \frac{ص}{٢}) = (١٠، ٥)$	(٧)	$(٣، ٦ + ب)$ تقع على محور السينات فإن : $ب + ٥ = \dots\dots\dots$
(٨)	$(س، ص + ١) = (٥، ١٠)$	(٨)	$(س^٢، ٤٥)$ حيث $س \neq$ . تقع فى الربع .....
(٩)	$(س^٣، ص - ١) = (٢٧، ٣١)$	(٩)	$(١، ٥ -)$ تقع فى الربع ..... حيث $١ > ٠$
(١٠)	$(س، ص + ١) = (١، \frac{١}{٢})$	(١٠)	$(٧، ١)$ تقع فى الربع ..... حيث $١ > ٠$



(٣)	نخير الإجابة الصحيحة	(٤)	نخير الإجابة الصحيحة
(١)	إذا كان (أ - ٤ ، ٨) تقع على محور الصادات فإن أ = ..... ( ١ ، ٤ ، ٨- ، ١ )	(١)	س = {١} = {١} فإن س = ٢ = ..... ( ١ ) ، { ( ١ ، ١ ) } ، ( ١ ، ١ ) ، { ١ }
(٢)	إذا كان ( ٥ ، ب - ٧ ) تقع على محور السينات فإن ب = ..... ( ٢ ، ٥ ، ٧ ، ١٢ )	(٢)	س = {٢} ، ص = {٣} - {٣} فإن س × ص = ..... ( ٦ ) ، { ٦ } ، ( ٢ ، ٣ ) ، { ( ٢ ، ٣ ) }
(٣)	إذا كان (أ ، ب) تقع فى المربع الثانى فإن أ × ب ..... صفر ( < ، > ، = ، ≤ )	(٣)	س = {٢} ، ن (س × ص) = ٦ فإن : ن(ص) = ..... ( ٣ ) ، ٦ ، ١٢ ، { ٣ }
(٤)	إذا كان ( س ، ص ) فى المربع الثالث فإن (س <sup>٢</sup> ، ص) فى الربع ..... ( الأول ، الثانى ، الثالث ، الرابع )	(٤)	..... $\ni (\frac{1}{2} , \frac{1}{3})$ ( ط × ط ، ص × ص ، ح × ح ، غير ذلك )
(٥)	إذا كان ( س - ٤ ، ٢ - س ) فى الربع الثالث فإن س = ..... ( ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ )	(٥)	س = {٣} ، فإن : ن(س <sup>٢</sup> ) = ..... ( ٢ ) ، ٩ ، ١ ، { ( ٣ ، ٣ ) }
(٦)	إذا كان (س ، ص) تقع فى الربع الثالث فإن ( -س ، -ص) تقع فى الربع ..... ( الأول ، الثانى ، الثالث ، الرابع )	(٦)	س = {٣} ، ن(ص) = ٢ فإن : ن(س × ص) = ..... ( ٦ ، ٢ ، { ٦ } ، { ( ٢ ، ٣ ) }
(٧)	[٥،٢] × {٣} تمثل ..... (قطعة مستقيمة ، شعاع ، مستقيم ، منطقة مستطيلة)	(٧)	[٥،٢] × [٣،١] تمثل ..... (قطعة مستقيمة ، شعاع ، مستقيم ، منطقة مستطيلة)



(5)

إذا كانت:  $S = \{1, 2\}$   
 $S = \{1, 2, 3\}$   
 أوجد  $S \times S$  ومثلها بمخطط  
 سهمى وآخر بياني

(9)

$S \times S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$   
 أوجد  
 $S \cap S$   
 $S^2$

(6)

إذا كانت:  $S = \{2, 5\}$ ،  $S = \{3, 6\}$   
 أوجد  
 (أ)  $S \times S$  ومثلها بمخطط سهمى  
 (ب)  $S^2$  ومثلها بمخطط سهمى

(7)

إذا كانت:  $S = \{1, 3, 5\}$   
 $S = \{3, 6\}$   
 أوجد  
 (أ)  $S \times S$ ،  $S \times S$   
 (ب)  $S^2$ ،  $S^2$   
 (ج)  $S \times S$ ،  $S \times S$   
 (د)  $S \cap S$   
 (و)  $(S - S) \times (S - S)$

(10)

أكمل ما بأتى :  
 (أ)  $S \cap \emptyset = \dots$   
 (ب)  $S \times S = \{(1, 2), (2, 1)\}$   
 فإن:  $S^2 = \dots$   
 (ج)  $S \times S = \{(1, 2), (2, 1)\}$   
 (د)  $S \times S = \{(5, 5)\}$   
 فإن  $S \times S = \{3\}$   
 (هـ)  $S \times S = \{(1, 2), (2, 1)\}$   
 $5 \in S$ ،  $1 \in S$ ،  $4 \in S$   
 فإن:  $S = \dots$   
 (و)  $S \supset S$   
 $6 = S \times S$   
 $4 \in S$ ،  $1 \in S$ ،  $7 \in S$  فإن  $S \times S = \dots$   
 (ز)  $S - S = \{7\}$   
 $S - S = \{2, 4\}$   
 $S \cap S = \{6\}$  فإن  
 $(S \times S) \cap (S \times S)$

(8)

إذا كان:  $S = \{1, 2, 3\}$   
 $S = \{2, 5\}$ ،  $E = \{5\}$   
 أوجد:-  
 (أ)  $(S - S) \times E$   
 (ب)  $(S \cap S) \times S$   
 (ج)  $(S - E) \times (S - E)$   
 (د)  $(S \cap E) \times S$   
 (و)  $(S \cup E) \times (S - S)$



## الدرس الثانى

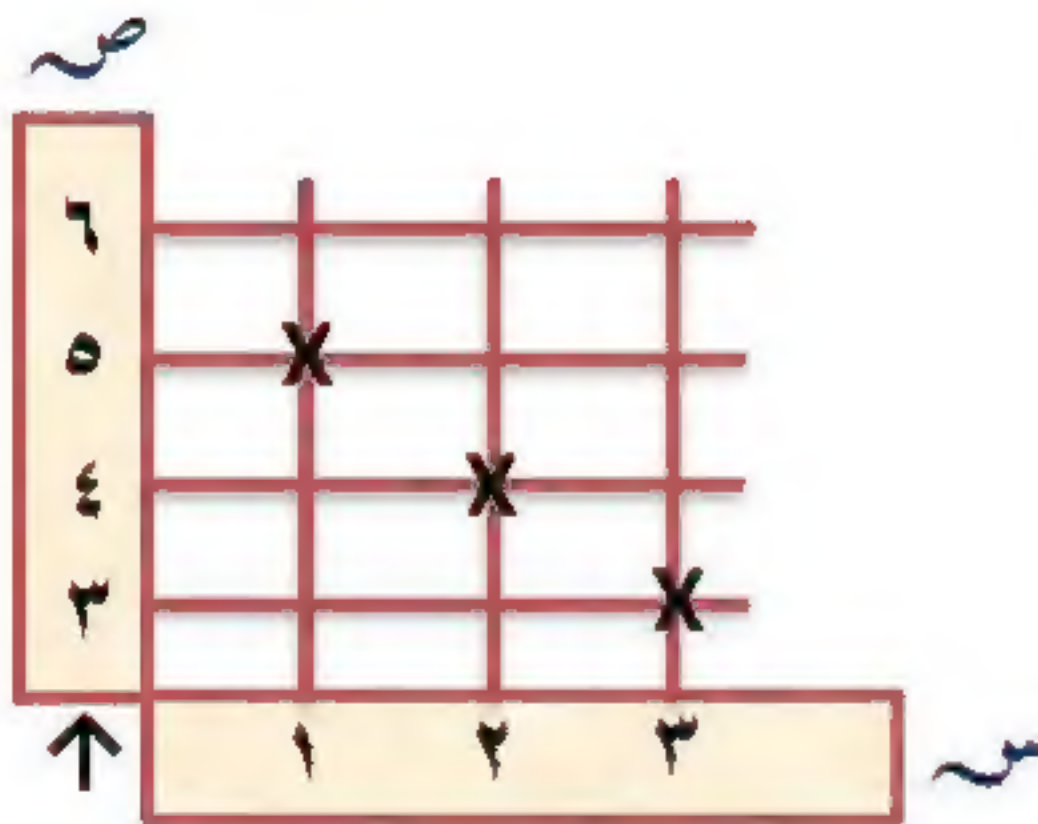
## العلاقة و الدالة

إذا كانت  $S$  ،  $T$  مجموعتين غير خاليتين فإن  
 (١) العلاقة  $E$  : هي رابط يربط بعض أو كل عناصر  $S$  ببعض أو كل عناصر  $T$   
 (٢) بيان العلاقة  $E$  : مجموعة الأزواج المرتبة التى مساقطها الأولى  $S$  ومساقطها الثانية  $T$

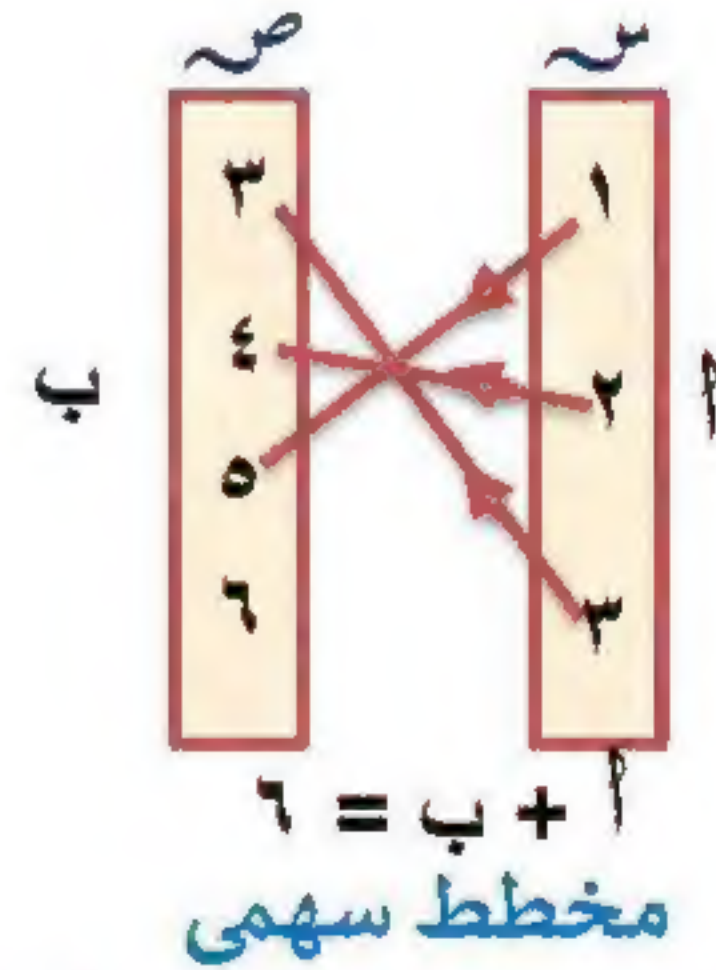
## التعريف

## مثال

إذا كانت  $S = \{1, 2, 3\}$  ،  $T = \{3, 4, 5, 6\}$  وكانت  $E$  علاقة من  $S$  إلى  $T$  حيث  $a \in S$   $b \in T$  تعنى  $((a = b + 1))$  لكل  $a \in S$  ،  $b \in T$  أكتب بيان  $E$  ومثلها بمخطط سهمى وآخر بياني



مخطط بياني



مخطط سهمى

بيان  $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

العلاقة  $E$  تصبح دالة  $D$  إذا تحقق الشروط التالية :-  
 (١) فى بيان  $E$  : كل عنصر من عناصر  $S$  يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط مع عناصر  $T$   
 (٢) فى المخطط السهمى : كل عنصر من عناصر  $S$  يخرج منه سهم واحد فقط إلى عناصر  $T$   
 (٣) فى المخطط البياني : كل خط رأسى يظهر عليه نقطة واحدة فقط

## ملاحظة

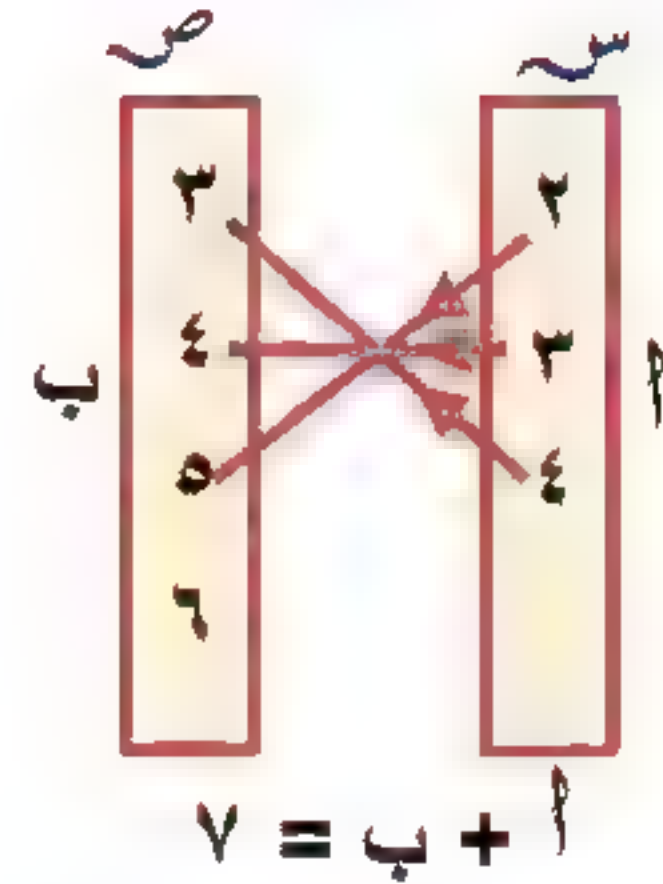


## الأمثلة

(١) إذا كانت  $s = \{2, 3, 4\}$ ،  $v = \{3, 4, 5, 6\}$  ع علاقة من  $s$  إلى  $v$  حيث  $a \in B$  تعنى  $((a + b = 7))$  لكل  $a \in s$ ،  $b \in v$  أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وأذكر هل ع دالة أم لا ؟ موضحاً السبب

الحل

بيان ع  $= \{(3, 4), (4, 3), (5, 2)\}$   
ع دالة لأن كل عنصر من  $s$  خرج منه سهم وحيد إلى  $v$

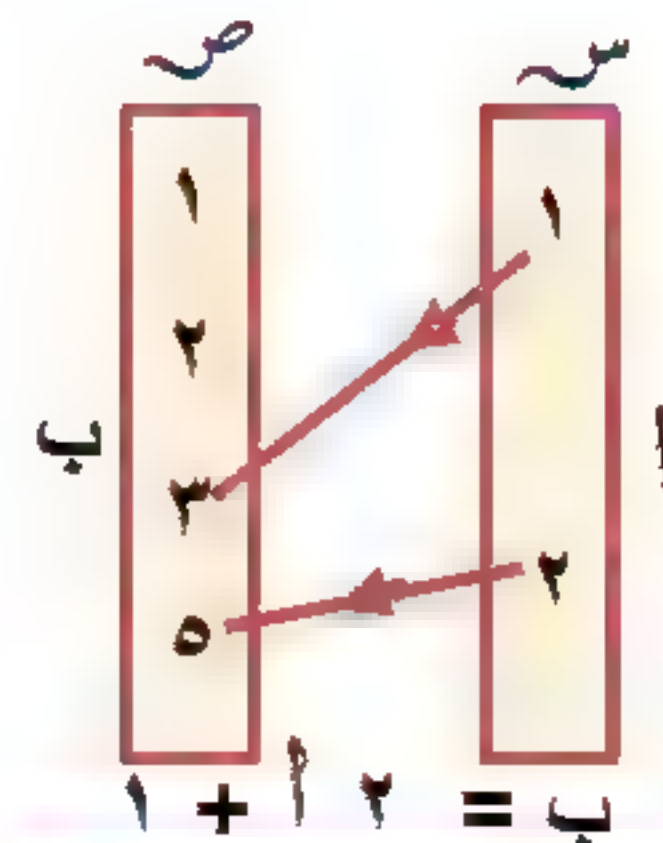
التعبير الرمزي للدالة د:  $s \leftarrow v$ حيث (١) المجال هو:  $s$ (٢) المجال المقابل هو:  $v$ (٣) المدى هو: صور  $s$  فى  $v$  آخر كل سهم\* المدى  $\supset$  المجال المقابل\* بيان ع  $\supset s \times v$ 

## ملاحظة

(١) إذا كانت  $s = \{1, 2\}$ ،  $v = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  ع علاقة من  $s$  إلى  $v$  حيث  $a \in B$  تعنى  $((a + 2 = b))$  لكل  $a \in s$ ،  $b \in v$  أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى و هل ع دالة أم ؟ موضحاً السبب وأذكر المدى

الحل

بيان ع  $= \{(1, 3), (2, 4)\}$   
ع دالة لأن كل عنصر من  $s$  خرج منه سهم وحيد إلى  $v$   
المدى  $= \{3, 4\}$



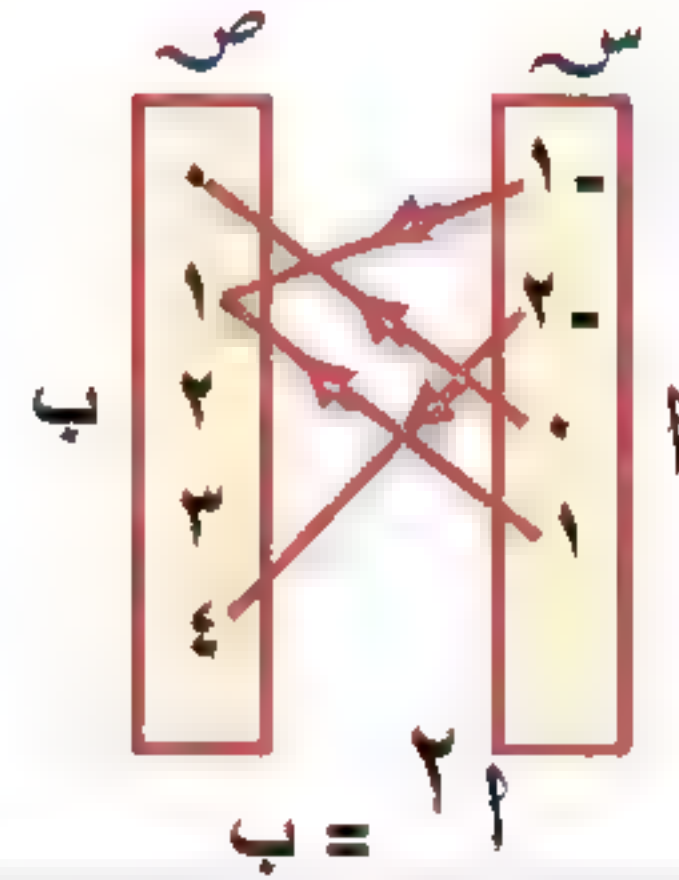


## تمارين

$s = \{1, 2, 3\}$ ،  $s = \{1, 2, 3, 4\}$ ، ع علاقة من  $s \leftarrow s$   
 تعنى  $((a - b))$  لكل  $a \in s$ ،  $b \in s$  أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وهل  
 ع دالة أم لا مع ذكر السبب وان كانت دالة عين مداها

(3) إذا كانت  $s = \{-2, -1, 0, 1\}$ ،  $s = \{ص : ص، \exists ط، 0 \leq ص < 5\}$  وكانت ع  
 علاقة من  $s$  إلى  $s$  حيث  $a \in s$  تعنى  $((a = b))$  لكل  $a \in s$ ،  $b \in s$  أكتب  
 بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وأذكر هل ع دالة أم لا؟ موضحاً المدى إذا كانت دالة  
 الحل

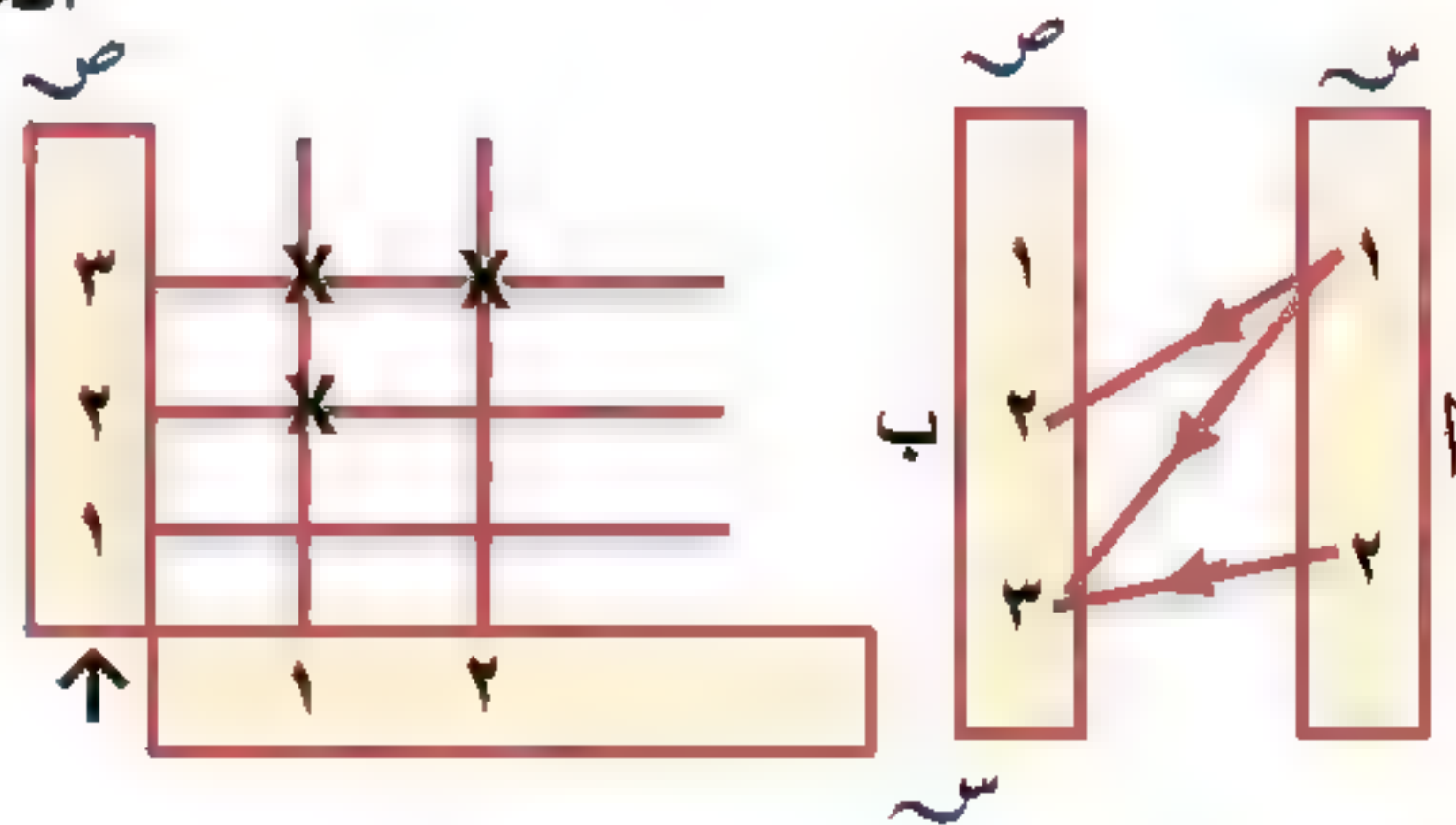
بيان ع  $= \{(0, 0), (1, -1), (2, -4), (3, 1)\}$   
 $\{(1, 4)\}$   
 ع دالة لأن كل عنصر من  $s$  خرج منه  
 سهم وحيد إلى  $s$   
 المدى  $= \{0, 1, 4\}$



(3) إذا كانت  $s = \{1, 2\}$ ،  $s = \{1, 2, 3\}$  وكانت ع علاقة من  $s$  إلى  $s$  حيث  
 $a \in s$  تعنى  $((a > b))$  لكل  $a \in s$ ،  $b \in s$  أكتب بيان ع ومثلها بمخطط بياني  
 وكل ع دالة أم لا؟ موضحاً السبب

بيان ع  $= \{(1, 2), (2, 1), (3, 1)\}$   
 ع ليست دالة لأن بعض عناصر  $s$  خرج  
 منها أكثر من سهم إلى عناصر  $s$

الحل







(5) إذا كانت  $\sim = \{1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$  وكانت  $\sim$  معرفة على  $\sim$  حيث  $\sim$  ب

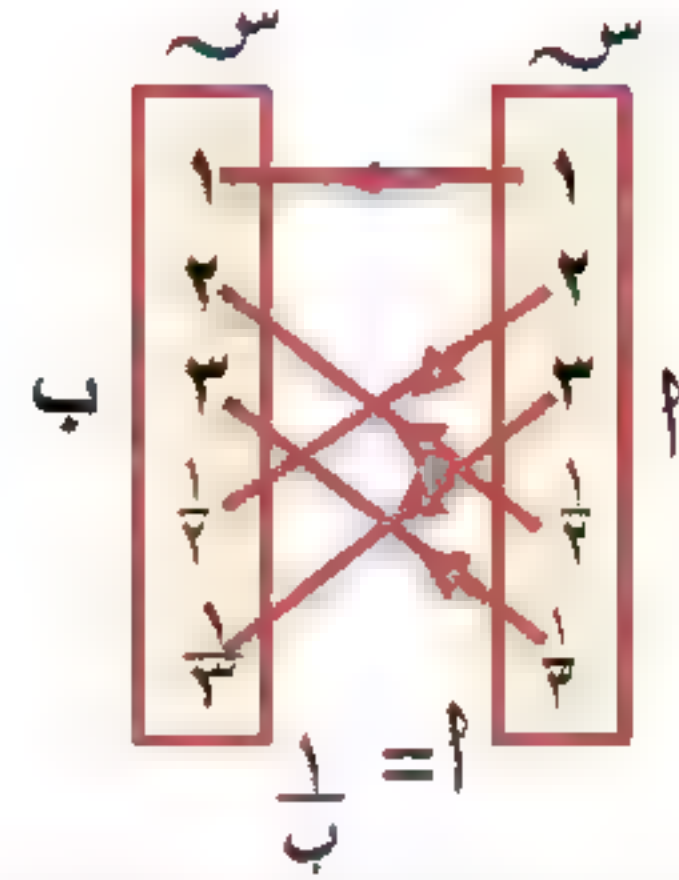
تعنى  $\sim$  معكوس ضربى للعدد ب لكل  $\sim$  ب  $\sim$  ب  $\sim$  أكتب بيان  $\sim$  ومثلها بمخطط سهمى وبين مع ذكر السبب  $\sim$  دالة أم لا

الحل

بيان  $\sim = \{(1, 1), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3}), (\frac{1}{2}, 2), (\frac{1}{3}, 3)\}$

$\{(3, \frac{1}{3}), (\frac{1}{2}, 2)\}$

$\sim$  دالة لأن كل عنصر من  $\sim$  خرج منه سهم وحيد إلى  $\sim$   
المدى  $\sim$



(6) إذا كانت  $\sim = \{2, 5, 8\}$ ،  $\sim = \{10, 16, 24\}$  وكانت  $\sim$  علاقة

من  $\sim$  إلى  $\sim$  تعنى  $\sim$  عامل من عوامل ب  $\sim$  ب  $\sim$  ب  $\sim$  أكتب بيان  $\sim$  ومثلها بمخطط سهمى وهل  $\sim$  دالة أم لا

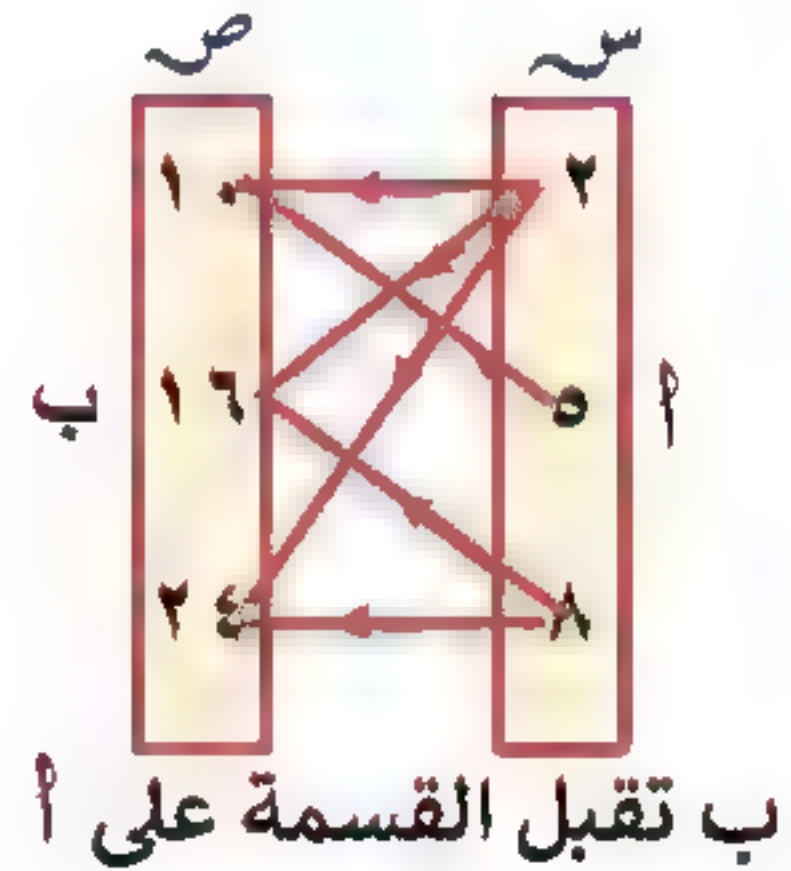
الحل

$\sim$  عامل من عوامل ب تعنى أن ب تقبل القسمة على العدد  $\sim$

بيان  $\sim = \{(2, 10), (2, 16), (2, 24), (5, 10), (5, 16), (5, 24), (8, 16), (8, 24)\}$

$\{(2, 10), (2, 16), (2, 24), (5, 10), (5, 16), (5, 24), (8, 16), (8, 24)\}$

$\sim$  ليست دالة لأن بعض عناصر  $\sim$  خرج منها أكثر من سهم





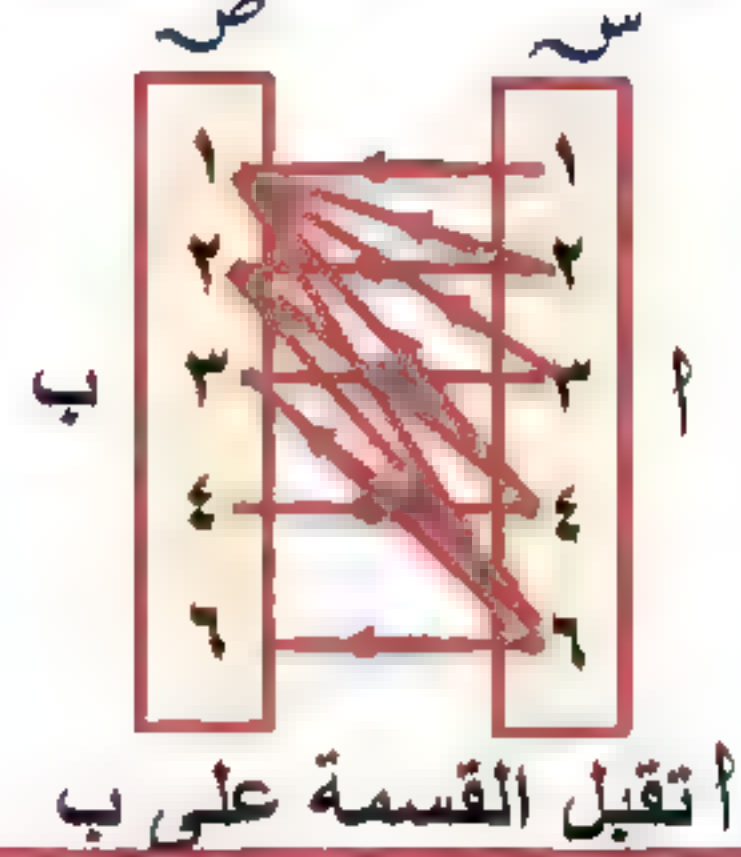


(٦) إذا كانت  $s = \{2, 5, 8\}$ ،  $v = \{10, 16, 24\}$  وكانت  $e$  علاقة من  $s$  إلى  $v$  تعنى  $a$  عامل من عوامل  $b$   $a \in s$ ،  $b \in v$   $v$  أكتب بيان  $e$  ومثلها بمخطط سهمى وهل  $e$  دالة أم لا

الحل

$a$  مضاعفاً للعدد  $b$  تعنى أن  $a$  تقبل القسمة على العدد  $b$

بيان  $e = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 3), (2, 4), (4, 4), (1, 6), (2, 6), (3, 6), (6, 6)\}$   
 $e$  ليست دالة لأن بعض عناصر  $s$  خرج منها أكثر من سهم



(١)  $a$  عامل من عوامل  $b$  تعنى  $b$  تقبل القسمة على  $a$

(٢)  $a$  تقسم العدد  $b$  تعنى  $b$  تقبل القسمة على  $a$

(٣)  $a$  مضاعفاً للعدد  $b$  تعنى  $a$  تقبل القسمة على  $b$

(٤)  $a$  ضعف العدد  $b$  تعنى  $a = 2b$

(٥) العدد الأولي : هو العدد الذى له عاملان مختلفان نفسه

والواحد الصحيح ٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ١٣، ١٧، ١٩، .....

(٦) الصفر عدد زوجى وليس له معكوس ضربى وله

معكوس جمعى

ملاحظات  
هامة





## نمارين

- (١) إذا كانت  $s = \{1, 2, 3\}$  ،  $v = \{4, 5, 6\}$   
علاقة من  $s$  إلى  $v$  حيث  $u \in v$  تعني  $(u = b + 1)$  لكل  
 $u \in s$  ،  $b \in v$  ، أكتب بيان  $u$  وقبلها بمخطط سهمي وهل ع دالة أم لا.  
موضحاً السبب
- (٢) إذا كانت  $s = \{1, 2, 3\}$  ،  $v = \{2, 3, 4, 6\}$   
وكانت ع علاقة من  $s$  إلى  $v$  حيث  $u \in v$  تعني  $(\frac{1}{u} = b)$  لكل  
 $u \in s$  ،  $b \in v$  ، أكتب بيان  $u$  وقبلها بمخطط سهمي وأذكر هل ع دالة أم  
لا موضحاً المدى
- (٣) إذا كانت  $s = \{s: s \geq 1, s < 6\}$  وكانت ع علاقة معرفة على  $s$  حيث  $u \in v$   
 $u \in s$  تعني  $(u = b + 1)$  لكل  $u \in s$  ،  $b \in v$  ، أكتب بيان  $u$  وقبلها بمخطط سهمي وهل ع  
دالة أم لا. وإذا كان  $u \in v$  فاجد ب
- (٤) إذا كانت  $s = \{0, 4, 16\}$  ،  $v = \{0, 2, 4\}$   
وكانت ع علاقة من  $s$  إلى  $v$  حيث  $u \in v$  تعني  $(u = \sqrt{b})$  أكتب بيان  $u$  وقبلها  
بمخطط بياني وهل ع دالة أم ؟
- (٥) إذا كانت  $s = \{1, 2, 3\}$  ،  $v = \{0, 1, 2, 3, 7\}$  وكانت ع علاقة من  $s$  إلى  $v$   
حيث  $u \in v$  تعني  $(b = 12 - u)$  لكل  $u \in s$  ،  $b \in v$  ، أكتب بيان  $u$  وقبلها  
بمخطط سهمي وهل ع دالة أم لا ؟ موضحاً السبب
- (٦) إذا كانت  $s = \{1, 2, 3, 4\}$  وكانت ع علاقة معرفة على  $s$  حيث  
 $u \in v$  تعني  $(u$  مضاعفاً للعدد  $b)$  لكل  $u \in s$  ،  $b \in v$  ، أكتب بيان  $u$  وقبلها بمخطط بياني  
ثم أذكر هل ع دالة أم لا ؟ موضحاً السبب





إذا كانت  $s = \{2, 3, 4\}$  ،  $s = \{6, 8, 10, 11, 15\}$  وكانت

(٧) ع علاقة من  $s$  إلى  $v$  حيث  $اع ب تعني (أ تقسم ب) لكل  $s \in s$  ،  $ب \in s$  ،$

أكتب بيان  $ع$  وقبلها بمخطط سهمي وهل  $ع$  دالة أم لا ؟ موضحاً السبب

إذا كانت  $s = \{1, 2, 3\}$  وكانت  $ع$  علاقة معرفة على  $s$  حيث

(٨)  $اع ب تعني (ا + ب = عدد يقبل القسمة على ٣) لكل ا، ب \in s$  ، أكتب بيان  $ع$

وقبلها بمخطط سهمي وهل  $ع$  دالة أم لا ؟ وأذكر المدى إذا كانت دالة

إذا كانت  $s = \{0, 1, 2\}$  وكانت  $ع$  علاقة معرفة على  $s$  حيث

(٩)  $اع ب تعني (ا + ب = عدد زوجي) لكل ا، ب \in s$  ، أكتب بيان  $ع$  وقبلها بمخطط

سهمي وهل  $ع$  دالة أم لا ؟

إذا كانت  $s = \{s: s \in \mathbb{Z} \text{ و } 1 \leq s \leq 3\}$  وكانت  $ع$  علاقة معرفة على  $s$

(١٠)  $اع ب تعني (ا + ب = عدد أولي) لكل ا، ب \in s$  ، أكتب بيان  $ع$  وقبلها بمخطط سهمي

وهل  $ع$  دالة أم لا ؟

إذا كانت  $s = \{-2, 2, 5\}$  ،  $s = \{3, 7, ك\}$  وكانت  $ع$  دالة من  $s$  إلى  $v$  حيث

(١١)  $اع ب تعني (ب = ١ - ا) لكل ا \in s$  ،  $ب \in s$  ،

١- أوجد قيمة  $ك$

٢- مثل  $ع$  بمخطط سهمي وآخر بياني





## دوال كثيرات الحدود

الدوال كثيرات الحدود  
هي الدوال التي تتكون من حد أو أكثر ويكون أسس المتغيرات عدد  
طبيعي ويكون مجالها ح ومجالها المقابل ح

تعريف

درجة الدالة  
هي أكبر درجة للحدود في قاعدة الدالة

تعريف

### مثال ١

درجتها	الدالة	
الثانية	$د(س) = ٣س^٢ + ٥س + ٢$	١
الخامسة	$د(س) = ٣س^٥ + ٤س + ١$	٢
الثالثة	$د(س) = (٢ - س)^٣$	٣
الثانية	$د(س) = س(س - ٢)$	٤
الأولى	$د(س) = ٢س + ١$	٥
الصفريّة	$د(س) = ٧$	٦
ليس لها درجة	$د(س) = \text{صفر}$	٧

### مثال ٢

حدد أي الدوال التالية كثيرة حدود وإذا كانت كثير حدود حدد درجة الدالة

$$١- د(س) = ٥س^٢ + س - ١$$

$$٢- د(س) = ٢ - س^٥ + ٤س$$

$$٣- د(س) = س^٢ + ٧$$

$$٤- د(س) = س \left( ٤ + \frac{١}{س} \right)$$

$$٥- د(س) = س + \frac{١}{٢} + ٢س + ٥$$

$$٦- د(س) = \sqrt{س} + ٣س$$

$$٧- د(س) = \frac{١}{٣}س + ٤$$





الحل

- ١- كثيرة حدود  $\leftarrow$  من الدرجة الثانية (تربيعية)
- ٢- كثيرة حدود  $\leftarrow$  من الدرجة الخامسة
- ٣- كثيرة حدود  $\leftarrow$  من الدرجة الثانية
- ٤- ليست كثيرة حدود  $\leftarrow$  ليس لها درجة
- ٥- ليست كثيرة حدود  $\leftarrow$  ليس لها درجة ٤
- ٦- ليست كثيرة حدود  $\leftarrow$  ليس لها درجة
- ٧- كثيرة حدود  $\leftarrow$  من الدرجة الأولى (خطية)

### مثال ٣

إذا كان : د(س) =  $س^2 + ٣$  أوجد

$$١- د(٢) ، د(١-) ، د(\sqrt{٣})$$

٢- إذا كان : د : ٣  $\leftarrow$  أ فوجد قيمة أ

الحل

$$١- د(س) = س^2 + ٣$$

$$د(٢) = (٢)^2 + ٣ = ٤ + ٣ = ٧$$

$$د(١-) = (١-) ^2 + ٣ = ١ + ٣ = ٤$$

$$د(\sqrt{٣}) = (\sqrt{٣})^2 + ٣ = ٣ + ٣ = ٦$$

$$٢- د : ٣ \leftarrow \therefore د(٣) = ١٢$$

$$١ = د(٣) = (٣)^2 + ٣ = ٩ + ٣ = ١٢$$

### مثال ٤

تدريب

فإن :-

$$د(س) = س^2 + ٢س - ٣$$

$$١- د(١) =$$

$$٢- د(٢-) =$$

$$٣- د(٠) =$$

$$٤- د(٥) =$$





## النمذيل البياني للدوال

$$د(س) = أس + ب$$

أو  $أ \neq 0$   $أ \neq 0$   $ب$

## الدالة الخطية

مائل بشرط  $أ \neq 0$

تمثل بيانيا بخط مستقيم

يقطع محور  
السينات بشرط  $ب \neq 0$   
ويمر بنقطة  
الاصل  $(0, 0)$

## مثال ٣

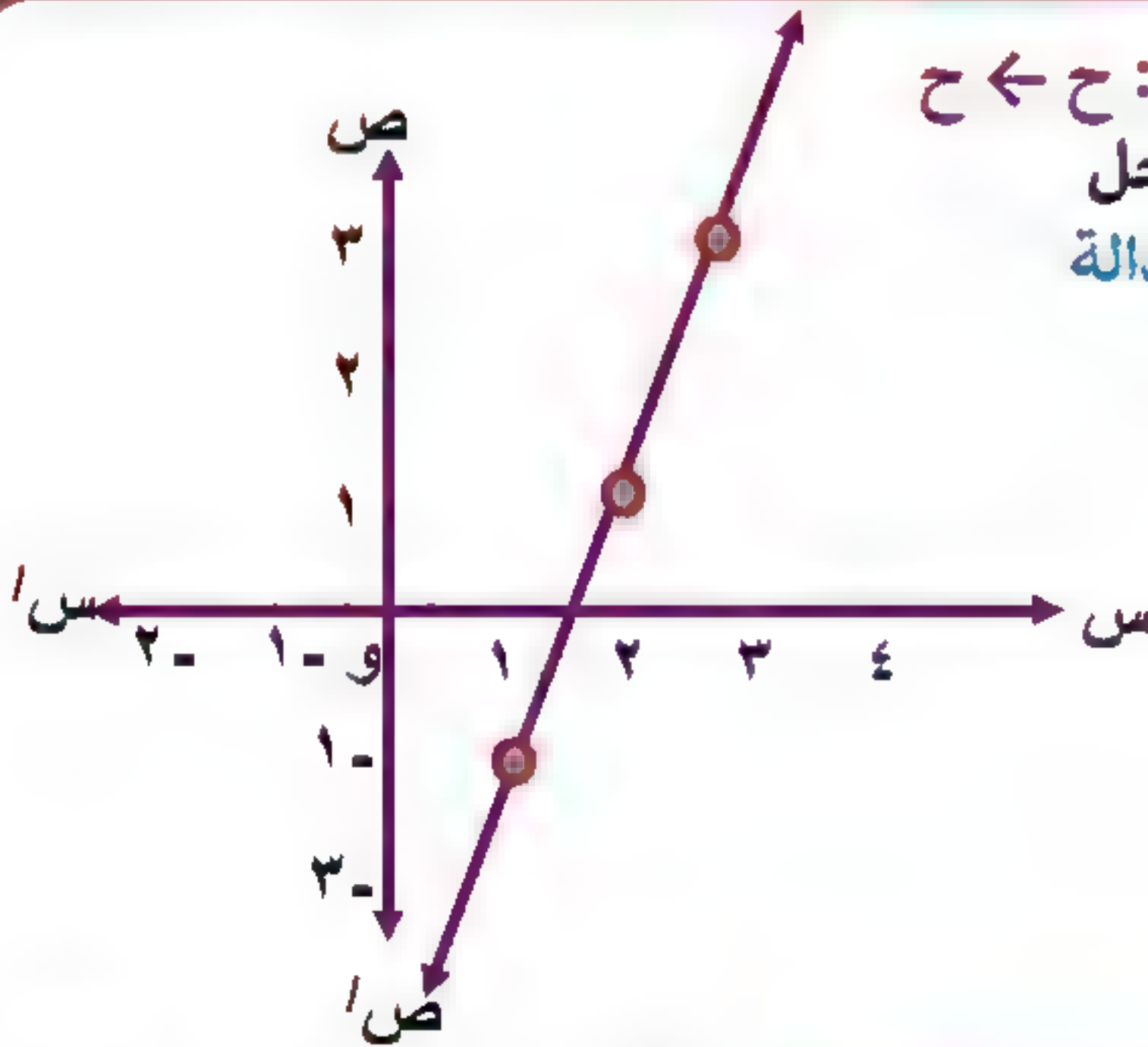
ارسم بيانيا الدالة  $د(س) = ٢س - ٣$  إذا كان  $د : ح \leftarrow ح$   
الحل  
نفرض ثلاث قيم اختيارية ل  $س$  ونعوض في الدالة  
لايجاد قيم  $ص$

س	١	٢	٣
ص	١-	١	٣

$$د(١) = ٢(١) - ٣ = ١-$$

$$د(٢) = ٢(٢) - ٣ = ١$$

$$د(٣) = ٢(٣) - ٣ = ٣$$



## تدريب

ارسم الدالة  $د(س) = س + ١$  إذا كان  $د : ح \leftarrow ح$





## مثال ٢

مثل بيانيا الدالة د(س) = س + ٣ إذا كان د : ح ← ح موضحاً نقط تقاطع المستقيم مع المحورين

الحل

نفرض ثلاث قيم اختيارية ل س ونعوض فى الدالة  
نوجد قيم ص

س	٢	١	٠
ص	٥	٤	٣

$$د(س) = س + ٣$$

$$د(٠) = ٣ + ٠ = ٣$$

$$د(١) = ٣ + ١ = ٤$$

$$د(٢) = ٣ + ٢ = ٥$$

\* نقطة تقاطع المستقيم مع محور

السينات (٠ ، ٣)

نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات (٣ ، ٠)

\* مساحة  $\Delta$  المصنوع من تقاطع المستقيم بالمحورين

$$= \frac{1}{2} \times |3| \times |3| = ٤,٥ \text{ وحدة مربعة}$$

## مثال ٣

$$د(س) = ٢س + ٣$$

$$ر(س) = ٥س - ١$$

أوجد د(٢) + ر(١)

الحل

$$د(٢) = ٢(٢) + ٣ = ٧$$

$$ر(١) = ٥(١) - ١ = ٤$$

$$\therefore د(٢) + ر(١) = ٧ + ٤ = ١١$$





## أمثلة إيجاد المجاهيل الموجودة بالدالة

١	إذا كان : د(س) = ٣س + ب وكان : د(٤) = ١٣ أوجد قيمة ب	٤	إذا كان : د(س) = س - ١٠ وكان د(١٣) = ١ أوجد قيمة أ
	الحل		الحل
	د(٤) = ١٣ ١٣ = ٣(٤) + ب ١٣ = ١٢ + ب ١ = ١٢ - ١٣ = ب		$\begin{pmatrix} ١٣ \\ ١ \end{pmatrix}$ $\begin{aligned} ١ &= (١٣)س \\ ١ &= ١٠ - ١٣ \\ ١٠ &= ١ - ١٣ \\ ٥ &= ١ \quad ١٠ = ١٢ \end{aligned}$
٢	إذا كانت د(س) = ٣س - ١ يمثلها مستقيم يمر بالنقطة (أ، ٢)	٥	إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ح ← ح حيث د(س) = ٦س - أ يقطب محور الصادات في النقطة (ب، ٣) . أوجد قيمة أ + ب
	الحل		الحل
	$\begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \end{pmatrix}$ تقع على المستقيم $\begin{aligned} ٢ &= د(١) \\ ٢ &= ٣(١) - ١ \\ ١ &= ٣ \end{aligned}$	*	∴ مستقيم الدالة يقطع محور الصادات في النقطة (ب، ٣) ∴ ب = صفر
٣	تدريب إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ح ← ح حيث د(س) = س + أ وكان د(-٣) = ٥ أوجد قيمة أ	*	$\therefore \begin{pmatrix} ٣ \\ ٠ \end{pmatrix}$ تحقق الدالة $\begin{aligned} ٣ &= د(٠) \\ ٣ &= ٠ \times ٦ - ١ \\ ٣ &= ١ - ١ \\ ٣ &= ٠ \\ ٣ &= ٠ + ١ \\ ٣ &= ١ \end{aligned}$
		*	$\begin{aligned} ٣ &= ٠ + ١ \\ ٣ &= ١ \end{aligned}$





## الدالة الثابتة

## طورتها

- د (س) = ١  
 \*  $١ \in \mathbb{R}$  أو  $١ \neq ٠$   
 \* من الدرجة الصفرية  
 \* ثابتة دائماً مهماً تغيرت قيمة س  
 \* تمثل بيانياً بخط مستقيم يواز محور السينات

## مثال ٢

إذا كانت د(س) = ٥  
 فإن

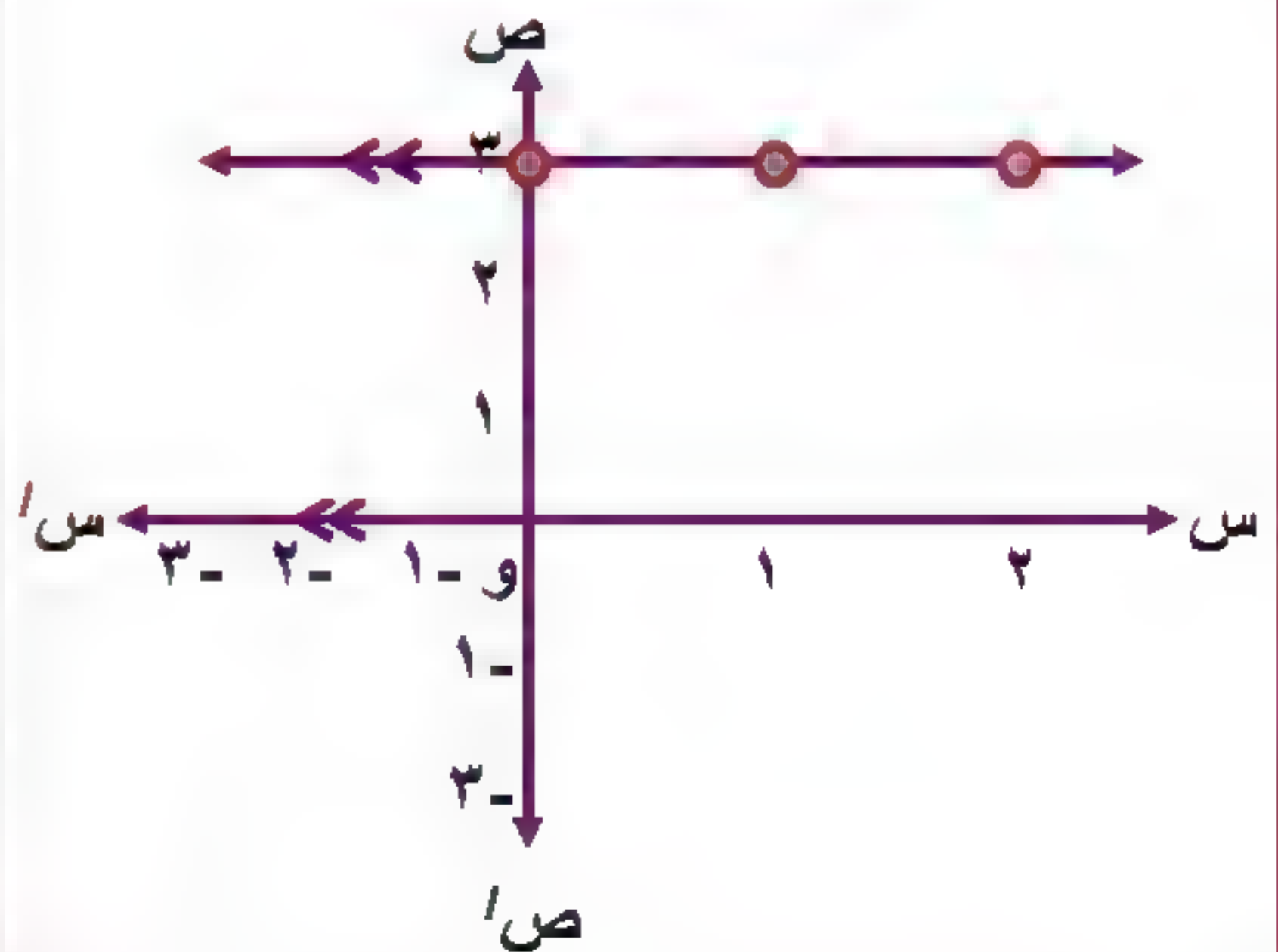
$$\begin{aligned}
 &= ١ - د(٢) \\
 &= ٢ - د(٥) \\
 &= ٣ - د(٠) \\
 &= ٤ - د(٢) + ٣ \\
 &= ٥ - د(٧) - ٤ \\
 &= ٦ - د(٤) - (٥) \\
 &= ٧ - د(٢) \\
 &= ٨ - د(٨) \div (٤) \\
 &= ٩ - د(٨) \div ٤
 \end{aligned}$$

## مثال ١

ارسم الدالة د(س) = ٣  
 الحل

نفرض ثلاث قيم لـ س

س	٢	١	٠
ص	٣	٣	٣





## نمارين

(٢) إذا كان : (١٨،٤)  $\in$  بيان الدالة

$$د(س) = ٣س - ٥$$

$$فإن : ١ = \dots\dots\dots$$

(١) أكمل إذا كان :

١  $د(س) = ٥س - ١$

$$د(٥) = \dots\dots\dots$$

$$تكون (٥, \dots) \in د$$

(٣)  $د : ح \leftarrow ح$  حيث  $د(س) = ٤س - ٥$  وكان

$$(١, ٣) \text{ تقع على المستقيم الممثل للدالة}$$

$$. \text{ أوجد قيمة } ١$$

(٤)  $د(س) = ٥س - ١$

$$\text{وكان } د(٣) = ٩ \text{ أوجد قيمة } ١$$

٢  $د(س) = \frac{١}{٢}س + ٢$

$$د(٤) = \dots\dots\dots$$

$$تكون (٤, \dots) \in د$$

(٥)  $د(س) = ٢س + ١$

$$\text{وكان } د(٣) = ٨ \text{ أوجد قيمة } ١$$

٣  $د(س) = ٢س + ب$

$$\text{وكان } د(١) = ٥$$

$$فإن : ب = \dots\dots\dots$$

٤  $د(س) = ٤س + ب$

$$(٣, ١٥) \in د$$

$$فإن : ب = \dots\dots\dots$$

(٦)  $د : ح \leftarrow ح$  حيث  $د(س) = ٦س + ١$

$$\text{تقطع محور الصادات (ب, ٥) أوجد}$$

$$\text{قيمة : } ١٢ + ٧ب$$

(٧)  $د(س) = ٧$

$$د(٥) = \dots\dots\dots, د(٢) = \dots\dots\dots$$

$$د(٧) + د(٧) = \dots\dots\dots$$

٥  $د(س) = ٢س + ٥$

$$ر(س) = ٧$$

$$فإن د(٢) + ر(٦) = \dots\dots\dots$$

(٨) ارسم

$$(١) د(س) = ٢س + ١$$

$$(٢) د(س) = ٤ - س$$

٦ (١, ٣)  $\in$  لمستقيم الدالة

$$د(س) = ٤س - ٥$$

$$فإن ١ = \dots\dots\dots$$





## الدالة التربيعية

## الدرس الرابع

## صورتها العامة

$$د(س) = أس^2 + بس + ج \quad أ \neq 0$$

\* دالة من الدرجة الثانية

\* تمثل بمنحنى مفتوح لأعلى  $أ > 0$    $أ < 0$  

ومفتوح لأسفل  $أ < 0$

\* إحداثي نقطة رأس المنحنى  $\left( -\frac{ب}{٢أ}, \left( -\frac{ب}{٢أ} \right) د \right)$

## مثال

ارسم الدوال التالية واستنتج ١- نقطة رأس المنحنى

٢- القيمة العظمى او الصغرى للدالة

٣- معادلة محور تماثل الدالة

(١)

$$د(س) = س^2 - ٢س - ٣$$

حيث  $س \in [-١, ٣]$

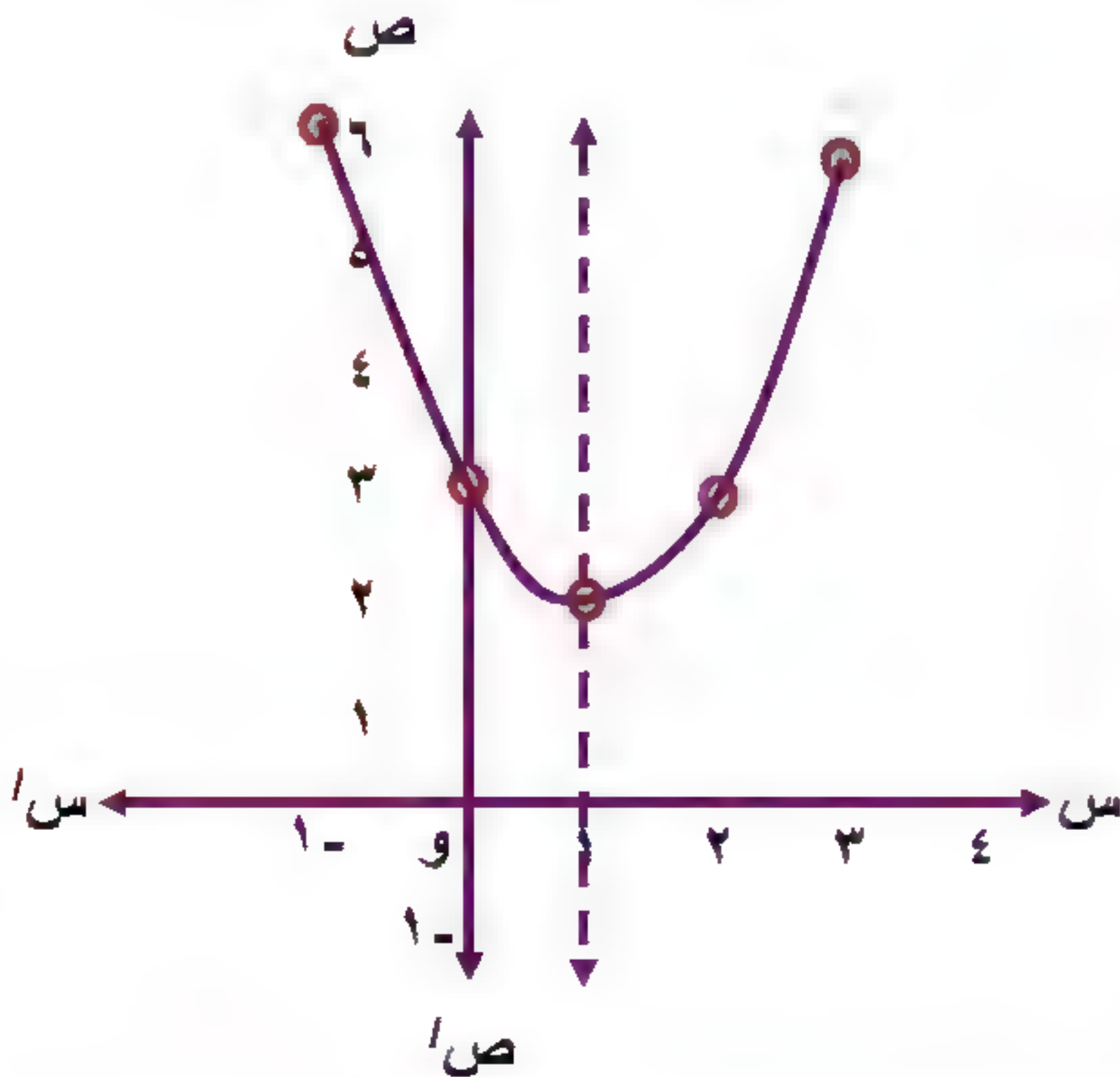
الحل

س	$س^2 - ٢س - ٣$	ص
-١	$(-١)^2 - ٢(-١) - ٣$	٦
٠	$(٠)^2 - ٢(٠) - ٣$	٣
١	$(١)^2 - ٢(١) - ٣$	٢
٢	$(٢)^2 - ٢(٢) - ٣$	٣
٣	$(٣)^2 - ٢(٣) - ٣$	٦

١- نقطة رأس المنحنى  $(١, ٢)$

٢- القيمة الصغرى للدالة  $ص = ٢$

٣- معادلة محور التماثل  $س = ١$





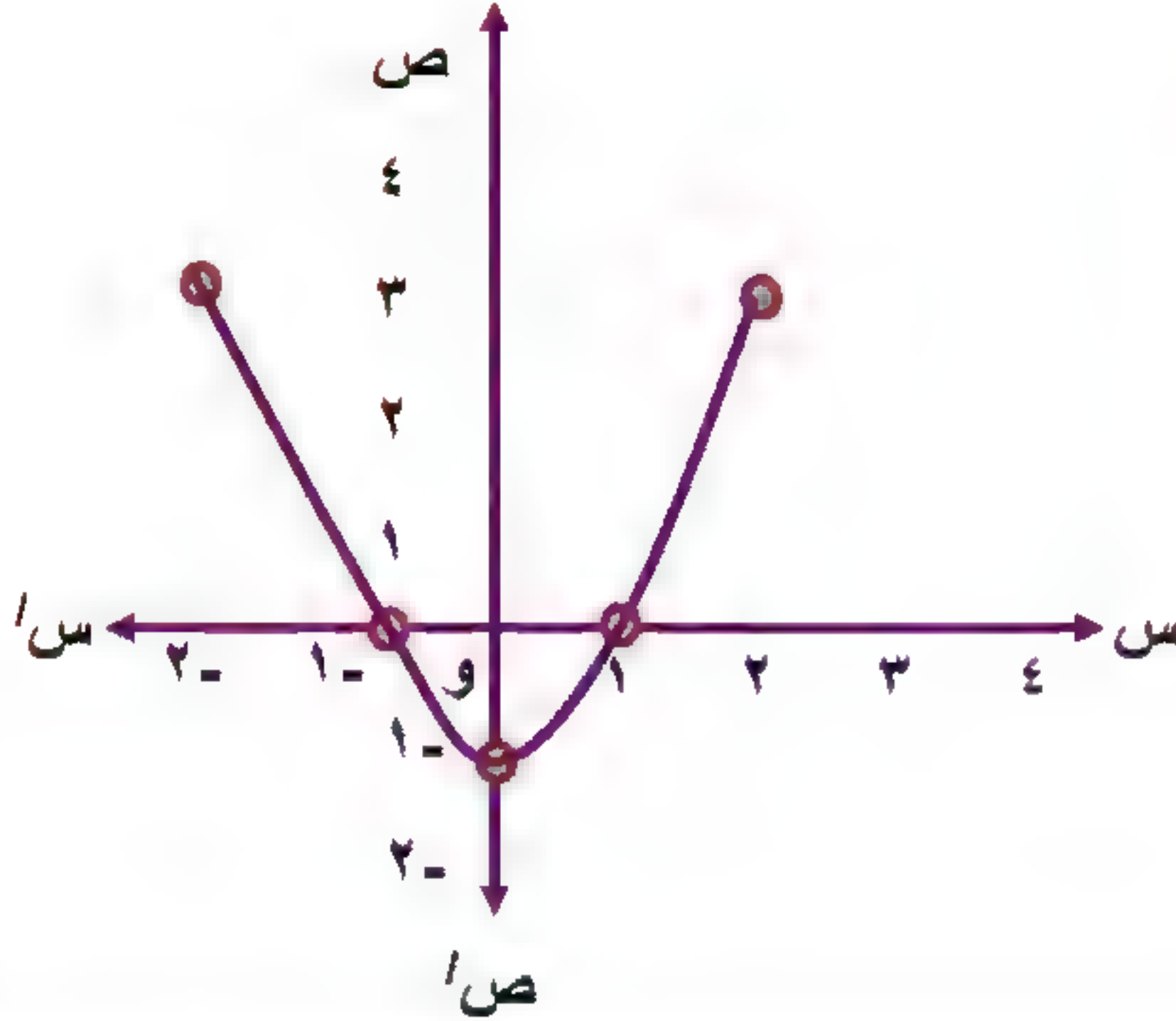


(٢)

$$د(س) = س^2 - ١$$

$$متخذاً س \in [-٢, ٢]$$

الحل



س	$س^2 - ١$	ص
-٢	$١ - ٢(٢-)$	٣
-١	$١ - ٢(١-)$	٠
٠	$١ - ٢(٠)$	-١
١	$١ - ٢(١)$	٠
٢	$١ - ٢(٢)$	٣

١- نقطة رأس المنحنى (٠، -١)

٢- القيمة الصغرى ص = -١

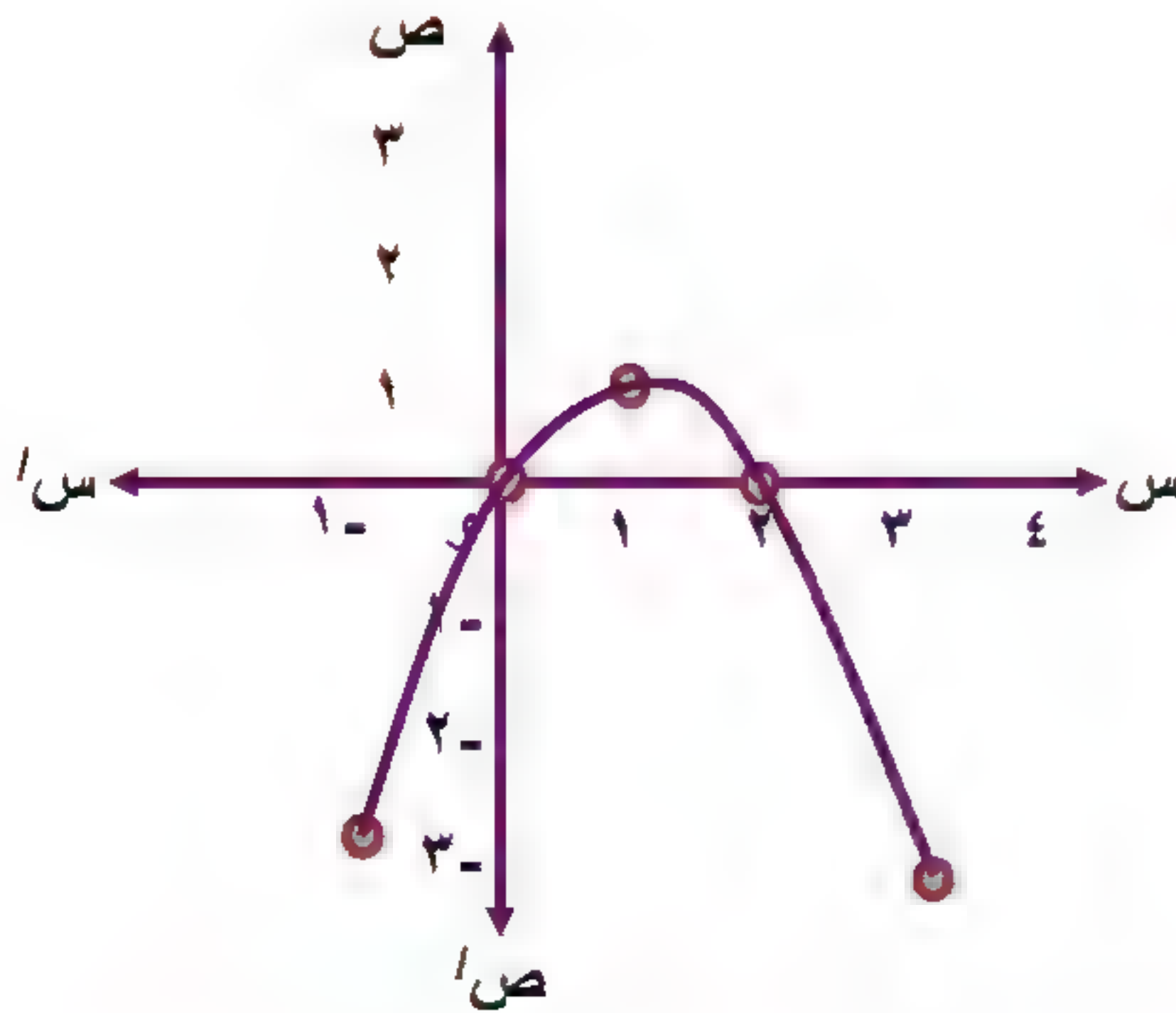
٣- معادلة خذ التماثل س = ٠

(٣)

$$د(س) = ٢س - س^2$$

$$متخذاً س \in [-١, ٣]$$

الحل



س	$٢س - س^2$	ص
-١	$٢(١-) - (١-)^2$	-٣
٠	$٢(٠) - (٠)^2$	٠
١	$٢(١) - (١)^2$	١
٢	$٢(٢) - (٢)^2$	٠
٣	$٢(٣) - (٣)^2$	-٣

١- نقطة رأس المنحنى (١، ١)

٢- القيمة العظمى ص = ١

٣- معادلة محور التماثل س = ١





(٤)

$$د(س) = ٢س^٢ + ٢س$$

متخذاً س  $\supset [-٣, ١]$ 

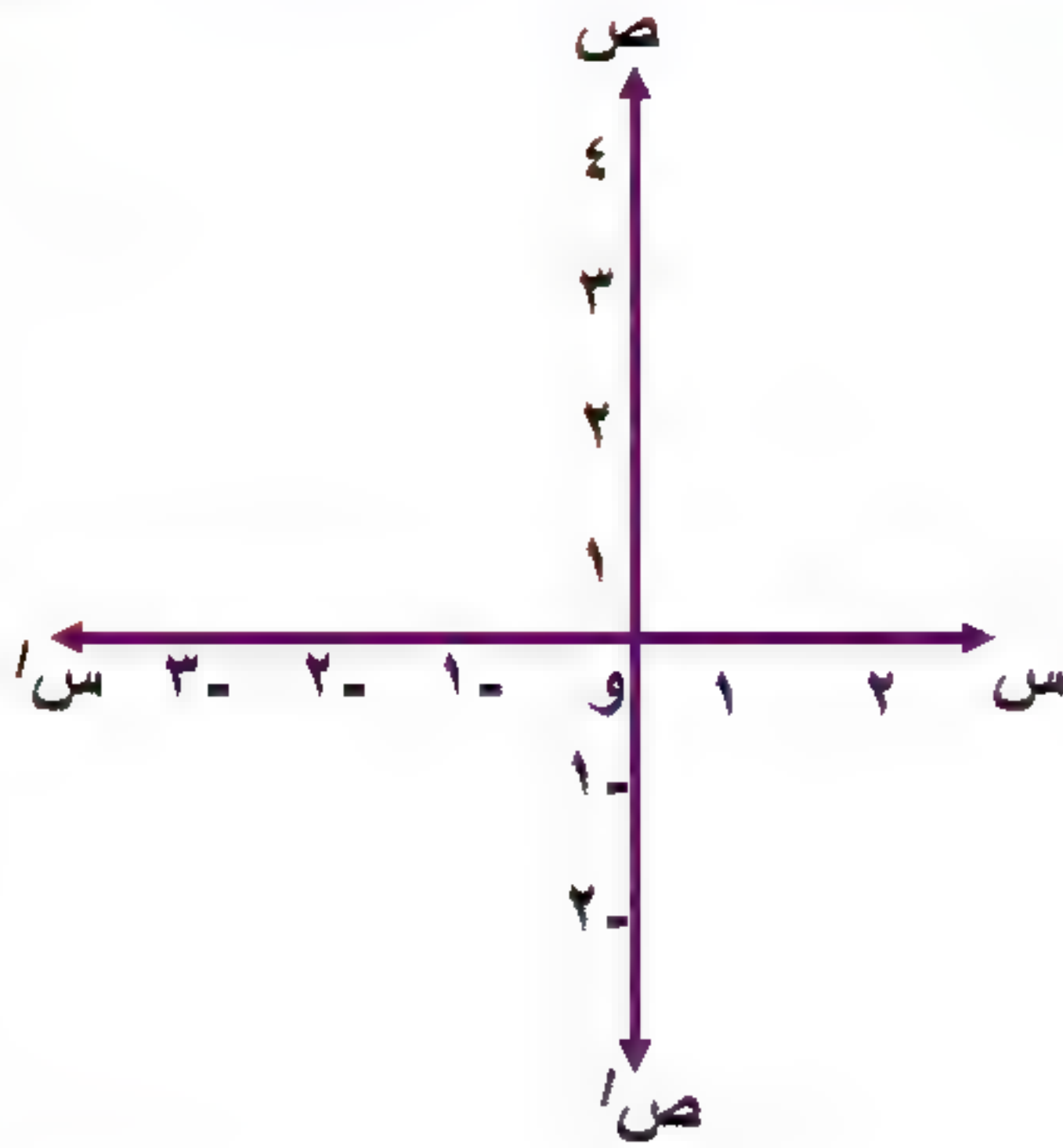
الحل

س	$٢س^٢ + ٢س$	ص

\*

\*

\*



(٥)

$$د(س) = ٢س - ٢$$

متخذاً س  $\supset [-٢, ٢]$ 

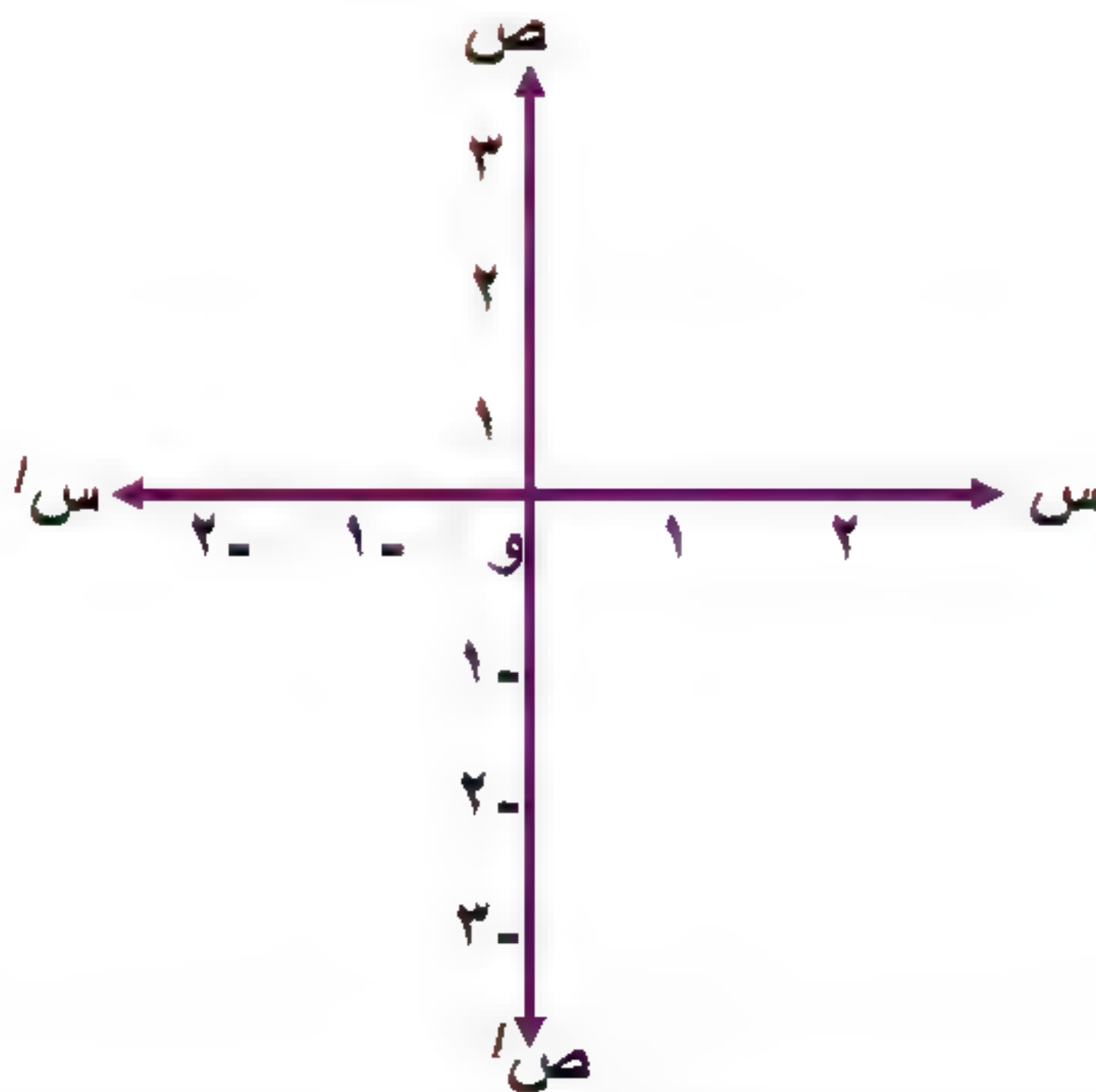
الحل

س	$٢س - ٢$	ص

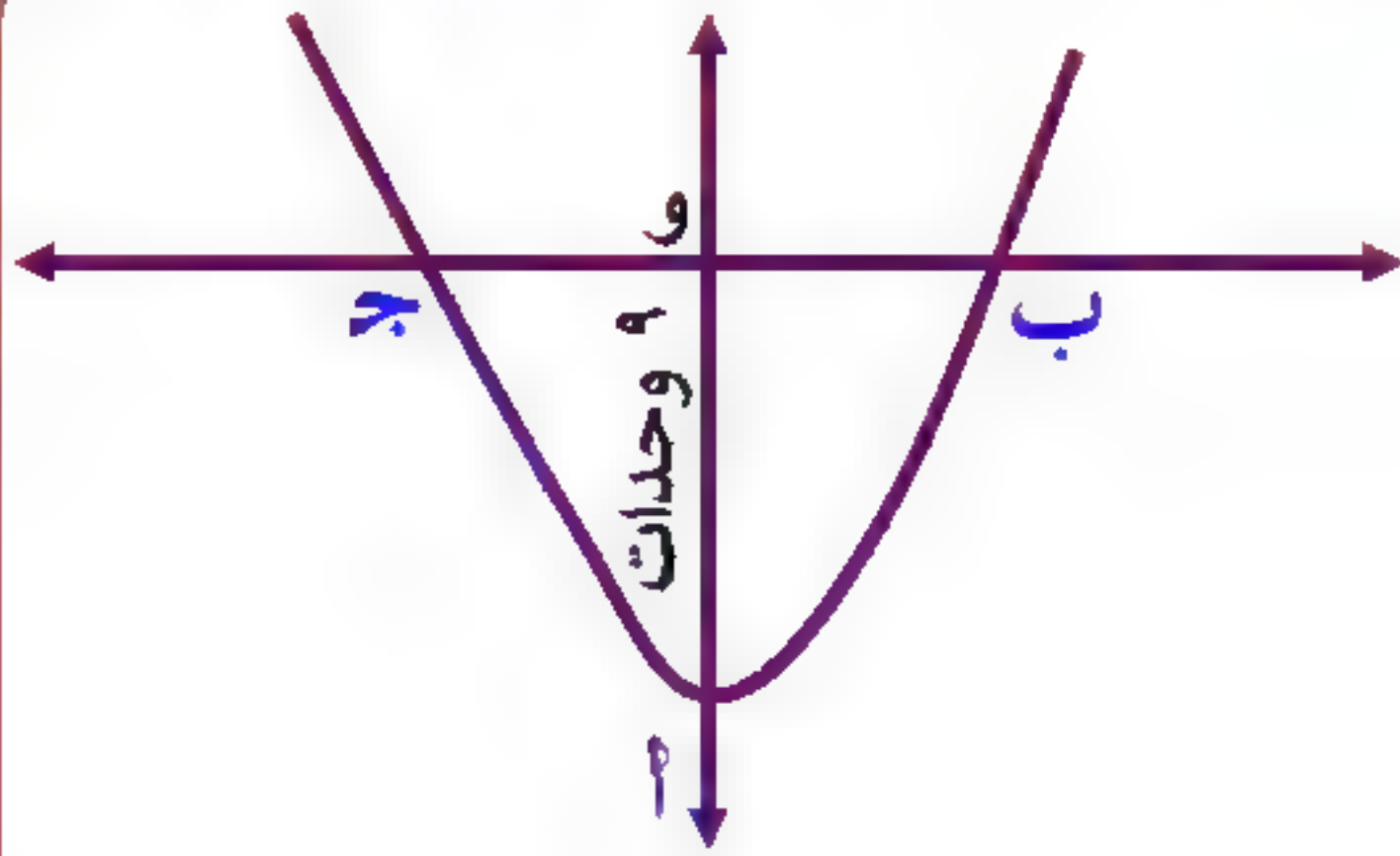
\*

\*

\*







(٦) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة

$$د(س) = س^2 + ك$$

وكان  $ا = ٩$  وحدات

أوجد

١- قيمة ك

٢- إحداثي ب، ج

٣- مساحة  $\Delta$  الذي رؤوسه أ، ب، ج

الحل

\*  $أ = ٩$  تقع على محور الصادات  $\therefore$  الإحداثي السطحي =  $٠$  ،  $ا = ٩$  وحدات

$\therefore ا(٩) = ٩ - ك$  تحقق معادلة المنحنى (نعوض)

$$٩ - ك = ٩ - (٩)^2 \quad \leftarrow \quad ك = ٩ - ٨١ = -٧٢$$

$$د(س) = س^2 - ٧٢$$

\*  $ب، ج$  تقع على محور السينات  $\therefore ص = ٠$

$$٠ = ٩ - س^2 \quad \leftarrow \quad س^2 = ٩ \quad \leftarrow \quad س = \pm ٣$$

\* مساحة  $\Delta$  أ ب ج  $= \frac{1}{2} \times ٩ \times ٦ = ٢٧$  وحدة مربعة

## نمارين

ارسم منحنى الدوال التالية واستنتج نقطة رأس المنحنى - القيمة العظمى أو الصغرى ومعادلة محور التماثل

$$١- د(س) = س^2 + ٢س - ٣ \leftarrow \text{متخذاً س} \in [-٤, ٢]$$

$$٢- د(س) = س^2 - ٢س \leftarrow \text{متخذاً س} \in [-١, ٣]$$

$$٣- د(س) = س^2 + ١ \leftarrow \text{متخذاً س} \in [-٢, ٢]$$

$$٤- د(س) = (١ - س)^2 \leftarrow \text{متخذاً س} \in [-٣, ١]$$

$$٥- د(س) = ٤ - س^2 \leftarrow \text{متخذاً س} \in [-٣, ٣]$$

$$٦- د(س) = ٤ - س^2 \leftarrow \text{متخذاً س} \in [-٢, ٢]$$





## الدرس الخامس

## النسبة

## تعريف

هي علاقة بين كمتين أ، ب توضح مقدار احتواء أحدهما على الآخر

تكتب على الصورة أ:ب أو  $\frac{أ}{ب}$ .

حيث يسمى أ مقدم النسبة ب تالي النسبة ،  
أ، ب حدي النسبة

## ملاحظة

إذا كانت النسبة بين عددين هي أ:ب نفرض  
العدد الأول أس والعدد الثاني ب س  
حيث  $س \neq ٠$  ثابت النسبة

## الأمثلة

٢- إذا كانت النسبة بين قياس زاوية ومتممتها  
يساوي ٤ : ٥ فما قياس كل من الزاويتان

الحل

نفرض قياس الزاويتان

٤س ، ٥س

∴ ٤س + ٥س = ٩٠

٩س = ٩٠

س = ١٠ ثابت النسبة

∴ قياس الزاويتان ٤٠° ، ٥٠°

تدريب

النسبة بين قياس زاوية ومكملتها كنسبة  
١ : ٥ أوجد قياس كل من الزاويتان ؟

١- عددان حقيقيان النسبة بينهما تساوي  
٣ : ٤ ومجموعهم ٧٠ فما العددان

الحل

نفرض العددين الأول = ٣س ، الثاني = ٤س

∴ ٣س + ٤س = ٧٠

٧س = ٧٠

س = ١٠ ثابت النسبة

∴ العددان

الأول = ٣ × ١٠ = ٣٠

الثاني = ٤ × ١٠ = ٤٠





٥ عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٥ وإذا  
أضيف لكل منهما ٥ أصبحت النسبة ٣ : ٥  
أوجد العددين

الحل

٣ إذا كان  
 $(٥ + ٢س) : (٥ - ٣س) = ٣ : ٢$  أوجد  
قيمة س

الحل

$$\frac{٢س + ٥}{٣س - ٥} = \frac{٣}{٢}$$

ضرب الطرفين = ضرب الوسطين

$$٣(٣س - ٥) = ٢(٢س + ٥)$$

$$٩س - ١٥ = ٤س + ١٠$$

$$٩س - ٤س = ١٠ + ١٥$$

$$٥س = ٢٥$$

$$س = ٥$$

٤ عددان النسبة بينهما ٤ : ٥ وإذا طرح من  
كل منهما ٦ أصبحت النسبة بين  
العددين الناتجين ٢ : ٣ فما العددين ؟

الحل

نفرض العددين ٤س ، ٥س

$$\frac{٤س - ٦}{٥س - ٦} = \frac{٢}{٣}$$

$$١٢س - ١٨ = ١٠س - ١٢$$

$$١٢س - ١٠س = ١٨ - ١٢$$

$$٢س = ٦$$

$$س = ٣$$

∴ العدد الأول =  $٤ \times ٣ = ١٢$ الثاني =  $٥ \times ٣ = ١٥$ 

- (١) ٦ جنيهات : ٣٠٠ قرش هي .....  
(٢) ١٠ متر : ٢٠٠ سم هي .....  
(٣) ٢ كجم : ٨٠٠ جم هي .....  
(٤) ٣ ساعات : ١٢٠ دقيقة هي .....  
(٥) ٣ طن : ١٥٠٠ كيلو جرام هي .....





## نمارين

- ١ إذا كان :  $(٣س - ١) : (٤س + ٣) = ٢ : ٣$  أوجد قيمة س
- ٢ إذا كان :  $(٢س + ٥) : (٣س - ١٠) = ٥ : ٤$  أوجد قيمة س
- ٣ عددان صحيحان النسبة بينهما  $٥ : ٤$  ومجموعهم ٢٧ أوجد العددين
- ٤ ما العدد الذي يضاف إلى حدى النسبة  $٧ : ١٢$  لتصبح مساوية  $٢ : ٣$
- ٥ ما العدد الذي إذا اضيف إلى حدى النسبة  $٣ : ٥$  لأصبحت  $٣ : ٤$
- ٦ زويتان متكاملتان النسبة بينهما  $٥ : ٤$  فما قياس كل من الزويتان ؟
- ٧ زويتان متتامتان النسبة بينهما  $٢ : ١$  فما قياس كل من الزويتان ؟
- ٨ عددان صحيحان النسبة بينهما  $٤ : ٥$  وإذا جمع إلى المقدم ٤ وطرح من التالى ٥ . فإن النسبة بينهما تصبح  $٦ : ٥$  فما العددين ؟





## الناسب

## الدرس السادس

## تعريف

هو تساوي نسبتين او أكثر  
إذا كان :  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$  فإن أ، ب، ج، د متناسبة

والعكس صحيح

حيث أ الأول ب الثاني ، ج الثالث ، د الرابع

أ، د طرفي التناسب ، ب ج وسطى التناسب

## خواص التناسب

$$١ \quad \text{إذا كان : } \frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} \Leftrightarrow أ \times د = ب \times ج$$

$$٢ \quad \text{إذا كان : } \frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} \Leftrightarrow \begin{aligned} &أ = ج \times م \\ &ب = د \times م \end{aligned} \quad \text{م ثابت التناسب } \neq 0$$

$$٣ \quad \text{إذا كان : } \frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} \Leftrightarrow \frac{أ}{ج} = \frac{ب}{د}$$

$$\Leftrightarrow \frac{د}{ب} = \frac{ج}{أ}$$

$$٤ \quad \text{إذا كان : } أ \times د = ب \times ج \Leftrightarrow \frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$$

$$\Leftrightarrow \frac{د}{ج} = \frac{ب}{أ}$$

$$\text{فمثلاً } ٥س = ٣ص \Leftrightarrow \frac{٣}{٥} = \frac{ص}{س} \text{ ، } \frac{٥}{٣} = \frac{س}{ص}$$





(١) أوجد قيمة س لتحصل على كميات متناسبة

١ س ٧، ١٠، ٣٥

الحل

$$\frac{10}{35} = \frac{س}{7}$$

$$س = \frac{10 \times 7}{35} = 2$$

٢ ٢، ٤، ٦، ٨، ١٢، ١٥

الحل

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{س}$$

$$س = \frac{6 \times 2}{4} = 3$$

٣ ٨، ٦، ١٢، ١٥، ١٢، ١٥

الحل

$$\frac{8}{12} = \frac{س}{6}$$

$$س = \frac{12 \times 8}{6} = 16$$

٤ ٤، ١٢، ٦، ١٥، ١٢، ١٥

الحل

$$\frac{6}{9} = \frac{4}{س}$$

$$س = \frac{6 \times 4}{9} = \frac{8}{3}$$

٥ س ٧، ١٠، ٣٥، ١٤، ٢١

الحل

$$\frac{7}{21} = \frac{س}{14}$$

$$س = \frac{21 \times 7}{14} = 10.5$$

أب، س، ب، ١٤، ٢١

الحل

$$\frac{2}{1} = \frac{أب}{س}$$

$$س = \frac{أب \times 1}{2}$$

تدريبات

أوجد قيمة ص لتحصل على تناسب فيما يلي  
١- ١٠، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦

٢- ٢، ٦، ١٤، ١٥، ١٦، ١٧

٣- ٩، ٦، ١٢، ١٥، ١٦، ١٧

٤- أ، ب، ١٥، ١٦، ١٧، ١٨، ١٩، ٢٠

٥- أ، ب، ١٥، ١٦، ١٧، ١٨، ١٩، ٢٠



(٢) إذا كان :  $\frac{1}{ب} = \frac{3}{5}$  أوجد قيمة

$$١- \frac{1+ب}{1-ب}$$

$$٢- \frac{2+13ب}{1+ب2}$$

الحل

نفرض أن  $1=23$  ،  $ب=25$

$$١- \frac{1+ب}{1-ب} = \frac{24}{22} = \frac{25+23}{23-25} = \frac{24}{22} = 8$$

$$٢- \frac{2+13ب}{1+ب2} = \frac{29}{13} = \frac{29+210}{23+210} = \frac{(23)3+(25)2}{(23)+(25)2} = \frac{29}{13}$$

(٣) إذا كان :  $\frac{ص}{2} = \frac{س}{3}$  أوجد قيمة

$$١- \frac{س+ص}{2س-ص}$$

$$٢- \frac{2س+2ص}{2س-2ص}$$

الحل

$$\frac{ص}{2} = \frac{س}{3} \therefore \frac{3}{2} = \frac{س}{ص}$$

نفرض أن  $س=23$  ،  $ص=22$

$$١- \frac{س+ص}{2س-ص} = \frac{25}{22-(23)2} = \frac{25}{24} = \frac{25}{24}$$

$$٢- \frac{2س+2ص}{2س-2ص} = \frac{2(22)+2(23)}{2(22)-2(23)} = \frac{2(22)+2(23)}{2(22)-2(23)} = \frac{2س+2ص}{2س-2ص} = \frac{13}{5}$$





(٤) إذا كان :  $٤س^٢ - ٩ص^٢ = ٠$  حيث  $س$  ،  $ص$  حقيقيان موجبان أوجد

١-  $س : ص$       ٢- قيمة  $\frac{س+ص}{س^٢+ص^٢}$

الحل

$٤س^٢ - ٩ص^٢ = ٠ \Rightarrow ٤س^٢ = ٩ص^٢$  بأخذ  $\sqrt{\quad}$  للطرفين حيث  $س$  ،  $ص$  موجبين  
 $\therefore \frac{س}{ص} = \frac{٣}{٢}$

نفرض أن  $س = ٣$  ،  $ص = ٢$

٢-  $\frac{٥}{٨} = \frac{٢٥}{٢٨} = \frac{٢٢+٢٣}{٢٢+٢٦} = \frac{س+ص}{س^٢+ص^٢}$

(٥) إذا كان :  $\frac{١}{٣} = \frac{س-٢ص}{س+٢ص}$  أوجد قيمة  $\frac{س}{ص}$

الحل

من المعطى حاصل ضرب الوسطين = حاصل ضرب الطرفين

$٣(س-٢ص) = (س+٢ص)$

$٣س - ٦ص = س + ٢ص$

$٣س - س = ٦ص + ٢ص$

$٢س = ٨ص$

$\therefore \frac{س}{ص} = \frac{٨}{٢} = ٤$

تمرين

إذا كان :  $\frac{٥}{٧} = \frac{١+٢ب}{٣ب}$  أوجد قيمة  $١:ب$





(٦) إذا كان:  $\frac{a+b}{b} = \frac{s+j}{s}$  أثبت أن أ، ب، ج، س كميات متناسبة

الحل

ضرب الطرفين = ضرب الوسطين

$$s(a+b) = b(s+j)$$

$$sa + sb = bs + bj$$

$$sa = bj$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{j}{s} \therefore \text{أ، ب، ج، س متناسبة}$$

(٧) إذا كان:  $\frac{a-s-j}{s} = \frac{b-s}{b}$  أثبت أن أ، ب، ج، س كميات متناسبة

الحل

ضرب الطرفين = ضرب الوسطين

$$b(a-s-j) = s(b-s)$$

$$ba - bs - bj = sb - s^2$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{j}{s} \therefore$$

أ، ب، ج، س كميات متناسبة

## تمرين

إذا كان:  $\frac{s+e}{e} = \frac{v+l}{l}$  أثبت أن س، ص، ع، ل كميات متناسبة





## نمارين

١- أكمل ما يأتي :-

١ إذا كان :  $\frac{3}{7} = \frac{س}{ص}$

فإن : س = ..... ، ص = .....

٢ إذا كان :  $\frac{5}{2} = \frac{1}{ب}$  أوجد قيمة

١-  $\frac{ب+1}{ب-1}$       ٢-  $\frac{ب+1}{ب+2}$

٣-  $\frac{1+1}{ب}$       ٤-  $\frac{1-1}{ب}$

٣ إذا كان :  $15 = 3ب$  أوجد قيمة

١-  $\frac{ب+1}{ب}$       ٢-  $\frac{1-1}{ب+1}$

ب إذا كان :  $3 = 5ب$

فإن : ١ = ..... ، ب = .....

٤ إذا كان :  $\frac{5}{2} = \frac{س+ص}{س-ص}$  أوجد

١-  $\frac{س}{ص}$       ٢-  $\frac{س+2}{س-3}$

ج إذا كان  $12 = 3ب$

فإن : ١-  $\frac{1}{ب}$  = .....

٢-  $12 - 3ب$  = .....

٥ إذا كان :  $9س - 2ص = 0$

حيث س ، ص موجبان أوجد

١-  $\frac{س}{ص}$       ٢-  $\frac{س+7}{س-3}$

د إذا كان :  $13 - 7ب = \text{صفر}$

فإن :  $\frac{1}{ب}$  = .....

$\frac{13}{7ب}$  = .....

٦ إذا كان :  $\frac{5+ج}{س} = \frac{1+ب}{ب}$  = صفر

أوجد

١-  $\frac{1}{ب}$

٢-  $\frac{12+4ب}{ب}$

هـ إذا كان ٢ ، ٣ ، ١٠ ، هـ كميات متناسبة

فإن هـ = .....

٧ إذا كان  $\frac{5+ج}{س} = \frac{1+ب}{ب}$  أثبت أن :

١ ، ب ، ج ، س كميات متناسبة

و إذا كان :  $\frac{4ب}{5} = \frac{ب+1}{2}$

فإن : أب = .....



## الدرس السابع

إذا كان :  $\frac{1}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و} = \dots = \frac{م}{ف} = ٢$

$$٢ = \frac{١}{ب}$$

$$٢ = \frac{ج}{د}$$

$$٢ = \frac{هـ}{و}$$

قاعدة هامة (١)

## الأمثلة

(١) إذا كان :  $\frac{ع}{٥} = \frac{ص}{٤} = \frac{س}{٣}$  أوجد قيمة  $\frac{٢ص - ع}{٣س - ٢ص + ع}$

الحل

$$٣ = س$$

$$٤ = ص \quad \therefore \frac{ع}{٥} = \frac{ص}{٤} = \frac{س}{٣} \quad \text{نفرض أن}$$

$$٥ = ع$$

$$\therefore \frac{٢ص - ع}{٣س - ٢ص + ع} = \frac{٢(٤) - ٥}{٣(٣) - ٢(٤) + ٥} = \frac{٣}{٢}$$

(٢) إذا كان :  $\frac{١}{٤} = \frac{ب}{٥} = \frac{ج}{٣}$  أثبت أن  $\frac{١ - ب + ج}{٣} = \frac{١ + ب - ج}{٣}$

الحل





(١) إذا كان:  $\frac{ج}{س} = \frac{أ}{ب}$  أثبت أن  $\frac{ج+أ}{س} = \frac{أ+ب}{ب}$

الحل

نفرض أن  $\frac{ج}{س} = \frac{أ}{ب} = م$  فإن  $ج = م س$  و  $أ = م ب$

الطرف الأيسر	الطرف الأيمن
$\frac{ج+أ}{س}$	$\frac{أ+ب}{ب}$
$\frac{م س + م ب}{س} =$	$\frac{م ب + م ب}{ب} =$
$\frac{م (س + ب)}{س} =$	$\frac{م (ب + ب)}{ب} =$
$\frac{م (س + ب)}{س} =$	$\frac{م (٢ ب)}{ب} =$
$٢ \leq ٣ + ٢ =$	$١ \leq ٣ + ٢ =$

من ١ ، ٢ الطرفين متساويان

(٢) إذا كان:  $أ، ب، ج، س$  متناسبة أثبت أن  $\frac{ج+أ}{س+ب} = \frac{أ-ج}{س-ب}$

الحل

نفرض أن  $\frac{ج}{س} = \frac{أ}{ب} = م$  فإن  $ج = م س$  و  $أ = م ب$

الأيسر	الأيمن
$\frac{ج+أ}{س+ب}$	$\frac{أ-ج}{س-ب}$
$\frac{م س + م ب}{س + م ب} =$	$\frac{م ب - م س}{س - م ب} =$
$\frac{م (س + ب)}{س + م ب} =$	$\frac{م (ب - س)}{س - م ب} =$
$\frac{م (س + ب)}{س + م ب} =$	$\frac{م (ب - س)}{س - م ب} =$
$٢ \leq ٢ =$	$١ \leq ٢ =$



إذا كان :  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و} = \dots = ك$  فإن

$$ك = \frac{أ_١ + ج_٢ + هـ_٣}{ب_١ + د_٢ + و_٣} \quad (\text{أحدى النسب})$$

قاعدة هامة (٢)

(١) إذا كان :  $\frac{ج}{د} = \frac{أ}{ب}$  متناسبة أثبت أن  $\frac{ج+أ}{د+ب} = \frac{١٢+٣}{٢+٥}$   
الحل الأول

نفرض أن  $\frac{ج}{د} = \frac{أ}{ب} = ك$  فإن  $ج = كد$  و  $أ = كب$

الأيسر	الأيمن
$\frac{كد + كب}{٢ + ٥} = \frac{١٢ + ٣}{٢ + ٥}$	$\frac{كد + كب}{٢ + ٥} = \frac{١٢ + ٣}{٢ + ٥}$
$\frac{ك(د + ب)}{٢ + ٥} = \frac{١٥}{٧}$	$\frac{ك(د + ب)}{٢ + ٥} = \frac{١٥}{٧}$
$ك = \frac{١٥}{٧} \leftarrow ٢$	$ك = \frac{١٥}{٧} \leftarrow ١$

من ١ ، ٢ الطرفين متساويان

الحل الثانى

بضرب حدى النسبة الاولى  $\times (١)$  والثانية  $\times (٥)$  وجمع المقدمات والتوالى  
 $\therefore \frac{ج+أ}{د+ب} = ك$  (أحدى النسب)  $\leftarrow ١$

بضرب حدى النسبة الاولى  $\times (١)$  والثانية  $\times (٥)$  وجمع المقدمات والتوالى  
 $\therefore \frac{ج+أ}{د+ب} = ك$  (أحدى النسب)  $\leftarrow ٢$





## تدريب

إذا كان:  $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{ل}$  أثبت أن

$$١- \frac{س٢ + ع٧}{ص٢ + ل٧} = \frac{س - ع٢}{ص - ل٢}$$

$$٢- \frac{س٣ + ع٣}{ص - ل٢} = \frac{س - ع٣}{ص٣ + ل}$$

أكمل ما يأتي :-

$$١ \quad \frac{١٥ + .....}{س٢ + .....} = \frac{ج}{س} = \frac{١}{ب} \quad \frac{..... - ج٢}{..... - ب٧}$$

$$٢ \quad \frac{..... + ١٢}{س٣ + .....} = \frac{ج + ١}{.....} = \frac{ج}{س} = \frac{١}{ب}$$

$$٣ \quad \frac{١ - ب}{.....} = \frac{ب + ١}{.....} = \frac{ب}{٥} = \frac{١}{٣}$$

$$٤ \quad \frac{ب٣ + ١}{.....} = \frac{ب + ١٢}{.....} = \frac{ب}{٣} = \frac{١}{٤}$$

$$٥ \quad \frac{.....}{س + ص٢} = \frac{.....}{س - ص} = \frac{٢}{ص} = \frac{١٢}{س}$$

$$٦ \quad \frac{ج + ب + ١}{ل} = \frac{ج}{٢} = \frac{ب}{٥} = \frac{١}{٣} \quad \text{فإن ك} = .....$$

$$٧ \quad \frac{ج + ب + ١٢}{ل} = \frac{ج}{٣} = \frac{ب}{٢} = \frac{١}{٦} \quad \text{فإن ك} = .....$$

$$٨ \quad \frac{س + ص + ع}{ل٣} = \frac{ع}{٢} = \frac{ص}{٣} = \frac{س}{٤} \quad \text{فإن ك} = .....$$





(٣) إذا كان :  $\frac{ع}{ب+ا-ج} = \frac{ص}{ا+ج-ب} = \frac{س}{ا-ب+ج}$  أثبت أن  $\frac{س+ص}{ا} = \frac{ص+ع}{ب}$

الحل

\* بجمع مقدمات وتوالي النسبين الأولى والثانية

$$م = \frac{س+ص}{ا-ب+ج+ا+ج-ب+ا+ج-ب}$$

$$م = \frac{س+ص}{ا٢} \quad \text{بالضرب } \times ٢$$

$$٢م = \frac{س+ص}{ا} \quad ١ \leftarrow$$

\* بجمع مقدمات وتوالي النسبتين الثانية والثالثة

$$م = \frac{ع+ص}{ب-ا+ج+ا+ج-ب+ا+ج-ب}$$

$$م = \frac{ع+ص}{ب٢} \quad \text{بالضرب } \times ٢$$

$$٢م = \frac{ع+ص}{ب} \quad ٢ \leftarrow$$

من ١ ، ٢ ينتج أن

$$\frac{س+ص}{ا} = \frac{ص+ع}{ب}$$





(٤) إذا كان:  $\frac{ب}{س+ص} = \frac{ا}{س-ص}$  أثبت أن  $\frac{ا-ب}{ص+س} = \frac{ا+ب}{ص-س}$

الحل

\* بجمع مقدمات وتوالي النسبين الأولى والثانية

$$م = \frac{س+ص}{ص+س+ص-ص}$$

$$م = \frac{ا+ب}{ص-س} \quad ١ \leftarrow$$

\* بضرب حدي النسبة الأولى  $\times (١)$  والثانية  $\times (-١)$  وجمع المقدمات والتوالي

$$م = \frac{ا-ب}{ص+س-ص+ص}$$

$$م = \frac{ا-ب}{ص+س} \quad ٢ \leftarrow$$

من ١، ٢. ∴ الطرفان متساويان

## تدريب

إذا كان:  $\frac{ا}{ص-س} = \frac{ب}{ص-ع} = \frac{ج}{س-ع}$  أثبت أن

$$\frac{ا+٢ب}{ع-ص} = \frac{٢ج+ا}{ع-س}$$



(٤) إذا كان:  $\frac{1+ج}{5} = \frac{ج+ب}{6} = \frac{ب+أ}{3}$  أثبت أن  $٧ = \frac{أ+ب+ج}{1}$

الحل

فكرة الحل ← تعديل المطلوب  $\frac{٧}{1} = \frac{أ+ب+ج}{1} \Leftarrow \frac{1}{1} = \frac{أ+ب+ج}{٧}$

\* بجمع المقدمات والتوالي للنسب الثلاثة

$$م = \frac{أ٢ + ب٢ + ج٢}{١٤}$$

$$م = \frac{(أ+ب+ج)٢}{١٤}$$

$$١ < م = \frac{أ+ب+ج}{٧}$$

\* بضرب حدى النسبة الثانية  $\times (١-)$  وجمع مقدمات وتوالي الثلاث نسب

$$م = \frac{أ+ب-ب-ب+ج+ج+ج+أ}{٥+٦-٣}$$

$$٢ < م = ١ \Leftarrow م = \frac{١٢}{٢}$$

من ١، ٢ ينتج أن  $\frac{1}{1} = \frac{أ+ب+ج}{٧} = \frac{المقدم}{المقدم} = \frac{التالي}{التالي}$

$$\therefore ٧ = \frac{أ+ب+ج}{1}$$

تمرين

إذا كان:  $\frac{ع+س}{6} = \frac{ع+ص}{3} = \frac{س+ص}{5}$  أثبت أن

$$\frac{ع-س}{2} = \frac{ع+ص+س}{7}$$



## نمارين

(١) اكمل ما يأتى

(١) إذا كان :  $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٥} = \frac{ع}{٤}$  فإن

$$\frac{س - ص + ع}{٢ - ٥ + ٤} = \frac{س - ص + ع}{١}$$

(هـ)  $\frac{١٢ + .....}{٥٥ + .....} = \frac{ج}{٥} = \frac{١}{ب}$

(٢) إذا كان :  $\frac{١}{٥} = \frac{ب}{٧} = \frac{ج}{٣}$  فإن

$$\frac{ب - ج}{١ + ج} = \frac{.....}{.....}$$

(و)  $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٣} = \frac{٢س + ص}{٤٢}$

فإن : ك = ..... =

(٣) إذا كان :  $\frac{١}{ب} = \frac{ج}{٥} = \frac{هـ}{٢}$  فإن

$$..... = \frac{١ + ج}{٥ + ب}$$

(ز)  $\frac{١}{٧} = \frac{ب}{٥} = \frac{ج}{٣} = \frac{١ + ب + ج}{٣٣}$

فإن : س = ..... =

(٤) إذا كان :  $\frac{١}{ب} = \frac{ج}{٥} = \frac{هـ}{٣}$  فإن

$$..... = \frac{١ + ج + هـ}{ب + ٥ + و}$$

(٥) إذا كان :  $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٥} = \frac{ع}{٤}$  أثبت أن :

$$\frac{٧}{١٧} = \frac{س + ص}{٤٣ + ع}$$

(ب)  $\frac{١}{٣} = \frac{ب}{٢} = \frac{١ + ب}{.....}$

(٦) إذا كان :  $\frac{١}{٣} = \frac{ب}{٥} = \frac{ج}{٤}$

أوجد قيمة :  $\frac{١ + ب}{ج + ب٣}$

(ج)  $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٢} = \frac{٢س + ص}{.....}$

(٧) إذا كان : أ ب ج = ٢ : ٥ : ٤

أثبت أن :  $\frac{١ - ب}{٣} = \frac{ب + ج٢}{١٣}$





إذا كان :  $\frac{1}{5} = \frac{ب}{3} = \frac{ج}{2}$  أثبت أن :

(٨)

$$\frac{ب+١٢}{١٣} = \frac{٣-ب-ج}{٧}$$

$$\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٣} = \frac{ع}{٤} = \frac{س+ص+ع}{.....}$$

(٥)

## نمارين على قاعدة (٢)

(١) إذا كان

$$(١) \quad \frac{ب}{س+ج} = \frac{١}{س-ج} \quad \text{أثبت أن :} \quad \frac{ب+١}{ج} = \frac{١-ب}{س}$$

$$(٢) \quad \frac{س}{١-ب+ج} = \frac{ص}{١+ج-ب} = \frac{ع}{ج-١+ب} \quad \text{أثبت أن :} \quad \frac{س+ص}{١} = \frac{ص+ع}{ب}$$

$$(٣) \quad \frac{س}{١+ب} = \frac{ص}{١-ب} = \frac{ع}{١-ب+٢ج} \quad \text{أثبت أن} \quad \frac{س+ص}{ب} = \frac{ص-ع}{١} = \frac{ع+ص}{ج}$$

$$(٤) \quad \frac{س}{١٢+ب} = \frac{ص}{١-٢ب} \quad \text{أثبت أن :} \quad \frac{٢س+ص}{١} = \frac{س-٢ص}{ب}$$

$$(٥) \quad \frac{س}{١٢-ب} = \frac{ص}{٢ب-ج} = \frac{ع}{٢ج-١} \quad \text{أثبت أن :} \quad \frac{٢س+ص}{١٤-ج} = \frac{س+ع}{٤ج-ب}$$

$$(٦) \quad \frac{س}{١٢+ب} = \frac{ص}{٢ب-ج} = \frac{ع}{٢ج-١} \quad \text{أثبت أن :} \quad \frac{٢س+٢ص+ع}{١٣+٦ب} = \frac{٣س+ص}{١٤+٤ب-ج}$$

$$(٧) \quad \frac{س+ص}{٧} = \frac{ع+ص}{٥} = \frac{ع+س}{٨} \quad \text{أثبت أن} \quad \frac{س+ص+ع}{س-ع} = ٥$$

$$(٨) \quad \frac{ب+١٢}{١} = \frac{٤ب+ج}{ب} = \frac{٤ج+١٣}{ج}$$

١- أثبت أن : كل نسبة = ٥

٢- أثبت أن : ب = ١٣





## الناسب المنسل

## الدرس الثامن

يقال للكميات أ، ب، ج أنها في تناسب متسلسل

$$\text{إذا كان : } \frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج}$$

حيث يسمى

أ الأول المتناسب ب الوسط المتناسب ،  
ج الثالث الثالث المتناسب

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} \Leftrightarrow ب = \pm \sqrt{أ \times ج}$$

الوسط =  $\pm \sqrt{\text{الأول} \times \text{الثالث}}$

تعريف

$$\frac{ب^2}{ج} = \frac{أ}{ب} \Leftrightarrow ب^2 = أ \times ج$$

$$\frac{ب^2}{ج} = \frac{أ}{ب} \Leftrightarrow ب^2 = أ \times ج$$

(١) أوجد الوسط المتناسب (الهندسي) بين الكميتين

$$١- ٩ ، ٤ \quad ٢- ٢ ، ٥ \quad ٣- ٩ ص٢ ، ٤ ص٣$$

الحل

$$\text{الوسط} = \pm \sqrt{\text{الأول} \times \text{الثالث}}$$

$$١- \text{الوسط} = \pm \sqrt{٩ \times ٤} = \pm ٦$$

$$٢- \text{الوسط} = \pm \sqrt{٢ \times ٥} = \pm \sqrt{١٠}$$

$$٣- \text{الوسط} = \pm \sqrt{٩ ص٢ \times ٤ ص٣} = \pm \sqrt{٣٦ ص٥} = \pm ٦ ص٢$$

تمرين

أوجد الوسط المتناسب بين الكميتين

$$١- ٣ ، ٢٧ \quad ٢- ٨ ، ١٨ \quad ٣- ١٢ ص٤ ، ١٨ ص٢$$





(٢) أوجد الثالث المتناسب بين الكمتين

١- ٥، ١٠      ٢- ٥، ١٠، ٢٠      ٣- ٢، ٤، ٦، ٨

الحل

$$\frac{\text{الثالث}}{\text{الأول}} = \frac{\text{الوسط}}{\text{الثاني}}$$

١- الثالث =  $\frac{2(5)}{10} = \frac{10}{10} = 1$

٢- الثالث =  $\frac{2(20)}{40} = \frac{40}{40} = 1$

٣- الثالث =  $\frac{2(2-4)}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

(٣) أوجد الأول المتناسب للکمتين :

١- ٨، ٣٢      ٢- ٥، ٥      ٣- ٢، ١٦، ٦٤

الحل

$$\frac{\text{الأول}}{\text{الثالث}} = \frac{\text{الوسط}}{\text{الثاني}}$$

١- الأول =  $\frac{2(8)}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

٢- الأول =  $\frac{2(5)}{5} = \frac{10}{5} = 2$

٣- الأول =  $\frac{2(2-16)}{16} = \frac{-32}{16} = -2$

تمرین

أكمل لتحصل على تناسب

٢- ٦٤ ، ١٦ ، ..... ، ٤

٤- ١٤ ، ٢٢ ، ..... ، ٤٤

١- ٩ ، ..... ، ٤

٣- ٢ ، ..... ، ٨





## قواعد هامة جداً

إذا كان  $a, b, c$  كميات متناسبة

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$$

إذا كان  $a, b, c, d$  فى تناسب متسلسل

$$c = b \cdot d$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a}$$

$$c = a \cdot d$$

## أمثلة

(١) أكمل ما يأتى

١ إذا كان  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a}$  فإن  $a : b = \dots$  ،  $\dots = 1$  .....

٢ إذا كان  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a}$  فإن  $a : b = \dots$  ،  $\dots = 1$  .....

٣ إذا كان  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a}$  فإن  $a : b = \dots$  ،  $\dots = 1$  .....

٤ إذا كان  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a}$  فإن  $a : b = \dots$  ،  $\dots = 1$  .....

فإن  $a : b = \dots$  ،  $\dots = 1$  .....

فإن  $a : b = \dots$  ،  $\dots = 1$  .....

(م ، م<sup>٢</sup> ، م<sup>٣</sup> ، م<sup>٤</sup>)





(٢) إذا كان ١، ب، ج كميات متناسبة

أثبت أن :  $\frac{1}{b} = \frac{b-1}{b-j}$

الحل :-

$\frac{b}{j} = \frac{1}{m}$   
 $\frac{1}{j} = \frac{m}{b}$

نفرض أن  $\frac{1}{b} = \frac{b-1}{b-j} = m$  ←

الطرف الأيسر	الطرف الأيمن
$\frac{1}{b}$	$\frac{b-1}{b-j}$
$\frac{j}{j}$	$\frac{j(b-1)}{j(b-j)}$ تعويض
$m =$	$\frac{j(b-1)}{j(b-j)}$ مشترك
من (١) (٢) الطرفان متساويان	$m =$ ← (١) اختزال

(٣) إذا كان ١، ب، ج كميات متناسبة

أثبت أن :  $\frac{b}{j} = \frac{b+1}{b+j}$

الحل :-

$\frac{b}{j} = \frac{1}{m}$   
 $\frac{1}{j} = \frac{m}{b}$

نفرض أن  $\frac{b}{j} = \frac{b+1}{b+j} = m$  ←

الطرف الأيسر	الطرف الأيمن
$\frac{b}{j}$	$\frac{b+1}{b+j}$
$\frac{j}{j} =$	$\frac{j(b+1)}{j(b+j)}$ تعويض
$m =$	$\frac{j(b+1)}{j(b+j)}$
من (١) (٢) الطرفان متساويان	$m =$ ← (١)





(٤) إذا كان ب وسط متناسبين ١، ج

أثبت أن :  $\frac{1}{ج} = \frac{1}{ب} + \frac{1}{ب}$

الحل :-

$\frac{ب}{ج} = \frac{ب}{ب}$   
 $\frac{ب}{ج} = \frac{ب}{ب}$

نفرض أن  $\frac{ب}{ج} = \frac{1}{م}$  ←

الطرف الأيسر

$\frac{1}{ج}$

$\frac{1}{ج} =$

$\frac{1}{ج} = \frac{1}{م} \leftarrow$

من (١) (٢) الطرفان متساويان

الطرف الأيمن

$\frac{1}{ب} + \frac{1}{ب} = \frac{1}{ب} + \frac{1}{ب}$

$\frac{1}{ب} + \frac{1}{ب} = \frac{1}{ب} + \frac{1}{ب}$

$\frac{1}{ب} + \frac{1}{ب} = \frac{1}{م} \leftarrow$

(٥) إذا كان ١، ب، ج كميات متناسبة

أثبت أن :  $\frac{1}{ج} = \frac{1}{ب} + \frac{1}{ب}$

الحل :-

$\frac{ب}{ج} = \frac{ب}{ب}$   
 $\frac{ب}{ج} = \frac{ب}{ب}$

نفرض أن  $\frac{ب}{ج} = \frac{1}{م}$  ←

الطرف الأيسر

$\frac{1}{ج}$

$\frac{1}{ج} =$

$\frac{1}{ج} = \frac{1}{م} \leftarrow$

من (١) (٢) الطرفان متساويان

الطرف الأيمن

$\frac{1}{ب} + \frac{1}{ب} = \frac{1}{ب} + \frac{1}{ب}$

$\frac{1}{ب} + \frac{1}{ب} = \frac{1}{ب} + \frac{1}{ب}$

$\frac{1}{ب} + \frac{1}{ب} = \frac{1}{م} \leftarrow$





(٦) إذا كان  $١$ ،  $ب$ ،  $ج$  متناسبة

أثبت أن :  $\frac{ب-١}{ج-١} = \frac{ب}{ج+١}$

الحل :-

$ب = ج م$   
 $١ = ج م$

نفرض أن  $م = \frac{ب}{ج} - \frac{١}{ج}$  ←

الطرف الأيسر

$\frac{ج م}{ج+٢ ج م} = \frac{ب}{ج+١}$

$\frac{ج م}{(١+٢) ج} =$

الطرف الأيمن

$\frac{ج م - ٢ ج م}{ج - ٢ ج م} = \frac{ب-١}{ج-١}$

$\frac{(١-٢) ج م}{(١-٢ ج م)} =$

$\frac{(١-٢) ج م}{(١+٢)(١-٢)} = \frac{(١-٢) ج م}{(١-٢ ج م)}$

$\frac{ج م}{(١+٢)} =$

٢ ←

من (١) (٢) الطرفين متساويان

١ ←

$\frac{ج م}{١+٢} =$

(٧) إذا كان  $١$ ،  $ب$ ،  $ج$ ،  $س$  كميات فى تناسب متسلسل

أثبت أن  $\frac{ب+٢ ج+٢ ج م}{س ب} = \frac{٢ ج+٢ ج م}{٢ س+٢ ج م}$

$ج = س م$   
 $ب = س م$   
 $١ = س م$

نفرض أن  $م = \frac{ب}{ج} - \frac{١}{ج} = \frac{ج}{س} - \frac{١}{ج}$  ←





الطرف الأيسر

$$\frac{2s \times 3 \times 2s}{s \times 2 \times 2s} = \frac{اج}{ب}$$

الطرف الأيمن

$$\frac{2(2s) + 2(2s)}{2(s) + 2(2s)} = \frac{ب + 2ج}{2س + 2ج}$$

$$\boxed{1} \leftarrow \boxed{م} = \frac{4 \times 2 \times 2s}{2 \times 2 \times 2s} =$$

$$\frac{(1 + 2) \times 2 \times 2 \times 2s}{(1 + 2) \times 2 \times 2s} = \frac{2 \times 2 \times 2s + 4 \times 2 \times 2s}{2 \times 2 \times 2s + 2 \times 2 \times 2s} =$$

من (١) (٢) الطرفان متساويان

$$\boxed{1} \leftarrow \boxed{م} =$$





## تمارين

(١) أوجد قيمة هـ لتحصل على كميات متناسبة :-

- ١ (١) ٦، هـ، ٢٤  
(٣) ٩، ١٢-، هـ  
(٥) هـ، ٦-، ٤٨  
(٧) ٢س<sup>٢</sup>ص<sup>٢</sup>، هـ، ٨س<sup>٢</sup>ص<sup>٢</sup>  
(٩) ١، هـ، ١ب<sup>٢</sup>  
(١١) هـ، ٦ب<sup>٢</sup>، ٤ب<sup>٢</sup>  
(٢) ٤، هـ، ٩  
(٤) ٨، هـ،  $\frac{1}{4}$   
(٦) ٢٢ب<sup>٢</sup>، ١ب، هـ  
(٨) ٨س<sup>٢</sup>، ٥س، هـ  
(١٠) ٢١٨، ٢٢٧، هـ  
(١٢) ١٤، هـ، ٢٥ب<sup>٢</sup>

٢ إذا كان ١، ب، ج كميات متناسبة أثبت أن :-

$$\begin{aligned} (١) \quad \frac{١}{ج} &= \frac{ب}{ج} \\ (٣) \quad \frac{١}{ج+١} &= \frac{ب-١}{ج-١} \\ (٥) \quad \frac{١}{ج} &= \frac{٢ب+٢١}{٢ج+٢١} \\ (٧) \quad \frac{١٢}{ج} &= \frac{٢ب}{٢ج} + \frac{٢١}{٢ب} \\ (٢) \quad \frac{١}{ج+١} &= \frac{ب}{ج+١} \\ (٤) \quad \frac{١}{ج} &= \frac{ب-١}{ج-١} \\ (٦) \quad \frac{١}{ج} &= \frac{٢ب+٢١}{٢ج+٢١} \\ (٨) \quad \frac{٢ج-٢١}{٢ج} &= \frac{٢ج-٢١}{٢ج+٢١} \end{aligned}$$

٣ إذا كان ١، ب، ج، د فى تناسب متسلسل أثبت أن :-

$$\begin{aligned} (١) \quad \frac{ب+١}{ج+ب} &= \frac{ج+ب}{د+ج} \\ (٣) \quad \frac{ب}{١} &= \frac{ج-٢}{ج-١} \\ (٢) \quad \frac{ب-١}{ج+ب} &= \frac{ج-٢}{د+ج} \\ (٤) \quad \frac{٥٢+ج}{٥} &= \frac{٢١+ب}{ب} \end{aligned}$$





## النغير

## الدرس الثامن

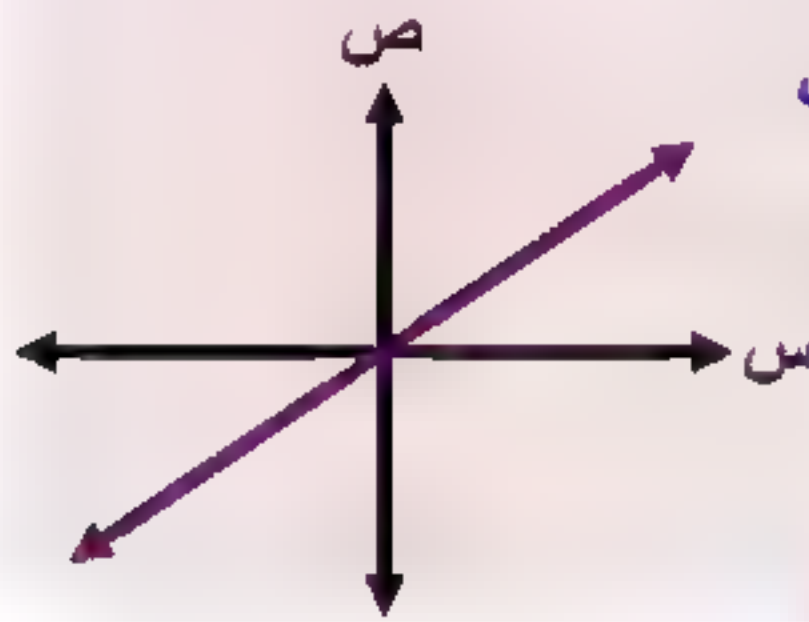
إذا كانت الكمية  $x$  تتغير طردياً مع الكمية  $y$  يكون



١-  $y = mx + c$  ، ثابت التغير قانون العلاقة

٢-  $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$  قانون التناسب

أولاً : النغير  
الطردى



## أمثلة

(١) إذا كانت  $x$  تتغير طردياً مع  $y$  وكانت  $y = 8$  عندما  $x = 16$  أوجد :

١- العلاقة بين المتغيرين  $x$  ،  $y$

٢- قيمة  $y$  عندما  $x = 6$

الحل

∴  $y \propto x$

∴  $y = kx$

$$2 = \frac{y}{x} = \frac{8}{16} = \frac{k}{16} \text{ ثابت التغير}$$

١- ∴ العلاقة بين  $x$  ،  $y$  هي  $y = \frac{1}{2}x$

٢- عند  $x = 6$  ∴  $y = \frac{1}{2} \times 6 = 3$

ص	٨	١٦
س	٦	١٦

## تدريب

إذا كانت  $x$  وكانت  $y = 5$  عندما  $x = 2$  أوجد :

١- العلاقة بين المتغيرين  $x$  ،  $y$

٢- قيمة  $y$  عندما  $x = 6$

٣- قيمة  $y$  عندما  $x = 10$

٤- قيمة  $y$  عندما  $x = 8$





- (٢) إذا كانت ص تتغير بتغير س وكانت س = ٢ عندما ص = ٧ أوجد :
- ١- العلاقة بين المتغيرين ص ، س
  - ٢- قيمة ص عندما س = ١٤
  - ٣- س عندما ص = ٢١

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{ص} &\propto \text{س} \\ \therefore \text{ص} &= \text{س} \\ \frac{\text{ص}}{2} &= \frac{\text{س}}{7} = \text{ك} \end{aligned}$$

١-  $\therefore$  العلاقة بين المتغيرين ص =  $\frac{7}{2}\text{س}$

٢- عندما س = ١٤  $\Leftarrow \text{ص} = 14 \times \frac{7}{2} = 49$

٣- عندما ص = ٢١  $\Leftarrow \frac{7}{2}\text{س} = 21 \therefore \text{س} = \frac{2 \times 21}{7} = 6$

- (٣) إذا كانت مربع السرعة ع لجسم ساقط من ارتفاع معين تتغير بتغير المسافة ف التي سقطها رأسياً وكانت ع = ٢١ م/ث عندما كانت ف = ٢٢,٥ م أوجد سرعة الجسم بعد هبوطه مسافة ٦٢,٥ م

ف ٢٢,٥ ٦٢,٥

الحل

$$\text{ع}^2 \propto \text{ف}$$

$$\text{ع}^2 = \text{كف}$$

$$\text{ك} = \frac{\text{ع}^2}{\text{ف}} = \frac{21^2}{22,5} = 19,6$$

١- العلاقة بين المتغيرين هي  $\text{ع}^2 = 19,6\text{ف}$

٢- عند ف = ٦٢,٥  $\Leftarrow \text{ع}^2 = 19,6 \times 62,5 = 1225$

$$\therefore \text{ع} = \pm \sqrt{1225} = \pm 35 \text{ م/ث}$$

إذا تغيرت ص عكسياً مع س أو (طردياً مع  $\frac{1}{\text{س}}$ )

يكون

$$\text{ص} \propto \frac{1}{\text{س}}$$

١- ص =  $\frac{\text{ك}}{\text{س}}$  العلاقة

٢-  $\frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_2} = \frac{\text{س}_2}{\text{س}_1}$  التناسب

ثانياً : التغير  
العكسي





(١) إذا تغيرت ص عكسياً مع س وكانت ص = ١٢ عندما س = ٨ أوجد :

- ١- العلاقة بين ص ، س      ٢- قيمة ص عندما س = ١,٥      ٣- س عندما ص = ٤

الحل

$$\therefore \text{ص} \propto \frac{1}{\text{س}}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{\text{م}}{\text{س}}$$

$$\therefore ٩٦ = ٨ \times ١٢ = \text{س} \times \text{ص} = \text{م}$$

١-  $\therefore$  العلاقة بين المتغيرين  $\text{ص} = \frac{٩٦}{\text{س}}$

٢- عند س = ١,٥  $\Leftarrow \text{ص} = \frac{٩٦}{١,٥} = ٦٤$

٣- عند ص = ٤  $\Leftarrow \frac{٩٦}{\text{س}} = \frac{٤}{١} \Leftarrow \text{س} = \frac{٩٦ \times ١}{٤} = ٢٤$

(٢) إذا كانت ص تتغير طردياً مع  $\frac{1}{\text{س}}$  وكانت ص = ١٤ عندما س = ٣ أوجد :

- ١- العلاقة بين المتغيرين      ٢- ص عندما س = ٦      ٣- س عندما ص = ٢

الحل

$$\therefore \text{ص} \propto \frac{1}{\text{س}}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{\text{م}}{\text{س}}$$

$$\therefore ٤٢ = ٨ \times ١٢ = \text{س} \times \text{ص} = \text{م}$$

١-  $\therefore$  العلاقة بين المتغيرين  $\text{ص} = \frac{٤٢}{\text{س}}$

٢- عند س = ٦  $\Leftarrow \text{ص} = \frac{٤٢}{٦} = ٧$

٣- عند ص = ٢  $\Leftarrow \frac{٤٢}{\text{س}} = \frac{٢}{١} \Leftarrow \text{س} = \frac{٤٢ \times ١}{٢} = ٢١$



(٣) إذا كانت ٢٠ بنت تصنع سجادة في ١٥ يوم  
ففي كم يوم ؟ يصنع ٣٠ بنت نفس السجادة مع تساوي القدرة  
الحل

نفرض عدد البنات = ص ، عدد الأيام = س

$$\therefore \frac{1}{\text{ص}} = \frac{20}{\text{س}} \quad \frac{2}{\text{ص}} = \frac{30}{\text{س}}$$

$$300 = 15 \times 20 = \text{ص} \times \text{س} = 2$$

١- العلاقة بين المتغيرين  $\frac{300}{\text{س}} = \text{ص}$

$$2- \text{عند ص} = 30 \leftarrow \frac{300}{\text{س}} = \frac{30}{1} \leftarrow \text{س} = \frac{1 \times 300}{30} = 10 \text{ أيام}$$

(٤) إذا كانت  $\text{س} = 9 + \text{ع}$  وكانت  $\text{ع} \times \text{ص}$  أوجد  
العلاقة بين  $\text{س}$  ،  $\text{ص}$  إذا علم أن  $\text{س} = 24$  عندما  $\text{ص} = 5$  ثم أوجد  $\text{س}$  عند  $\text{ص} = 1$   
الحل

$$\text{س} = 9 + \text{ع} \quad \text{ع} \times \text{ص}$$

$$\therefore \text{س} = 9 + \text{ص} \quad \text{ع} = \text{ص}$$

$$24 = 9 + 5$$

$$24 - 9 = 15 \leftarrow 24 = 9 + 15 \quad 3 = 2 \quad 15 = 25$$

١- العلاقة بين  $\text{س}$  ،  $\text{ع}$  هي  $\text{س} = 9 + 3$

$$2- \text{عند ص} = 1 \leftarrow \text{س} = 9 + 3 = 12$$



۱۰۰ → ۷ + ۹ = ۱۶

$$\frac{2}{3} = 1 \quad \text{و} \quad 7 + \frac{2}{3} = 7\frac{2}{3}$$

$$V + \frac{r}{2} = \Lambda$$

$$r = r \quad 1 = \frac{r}{r} \leftarrow \frac{r}{r} = 1 - 1$$

١- ∴ العلاقة بين س ، ص هي  $V + \frac{2}{S} =$

$$\frac{23}{6} = 7 + \frac{1}{6} = 7 \text{ عند } 6 \leftarrow$$

إذا كان :

۱- ص = م س ←  $\frac{ص}{س} = م$  فإن ص س

۲۔ ص =  $\frac{۲}{س}$  ← ص س = م      فإن ص  $\frac{۱}{س}$

## ملاحظات

(٦) إذا كان  $\frac{1}{p} = \frac{s^3 + v}{s^3 + v}$  أثبت أن :  $v \propto s$

### الحل

**فكرة حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين**

$$(س + ص^3) \times 2 = (ص^3 + س)$$

$$\text{س} + ۳ \text{ ص} = ۶ \text{ س} + ۲ \text{ ص}$$

$$3\text{ص} - 2\text{ص} = 6\text{س} - 5\text{س}$$

ص = ه س

∴ ص = م س ← ص 30 س



(٧) اذا كان  $s^2 - 10s + 25 = 0$  أثبت أن  $s = \frac{1}{s}$

الحل

فكرة التحليل  $(s - 5)(s - 5) = 0$

أما  $s - 5 = 0$

$\therefore s = 5$  بالقسمة على  $s$

$\frac{5}{s} = s$

$s = \frac{5}{s}$  ←  $s = \frac{1}{s}$

(٨) اختر الاجابة الصحيحة

١ (١)  $s = 7$  فإن  $s = \frac{1}{s}$  .....  
(  $\frac{1}{s}$  ،  $s - 7$  ،  $s^7$  ،  $s$  )

٢  $\frac{s}{4} = \frac{s}{4}$  فإن  $s = \frac{s}{4}$  .....  
(  $s$  ،  $\frac{1}{s}$  ،  $s + \frac{s}{4}$  ،  $s - \frac{s}{4}$  )

٣ العلاقة التى تمثل تغير طردى بين  $s$  ،  $s$  هى .....  
(  $s = 5$  ،  $s + 3 = s$  ،  $\frac{s}{3} = \frac{4}{s}$  ،  $\frac{s}{5} = \frac{s}{2}$  )

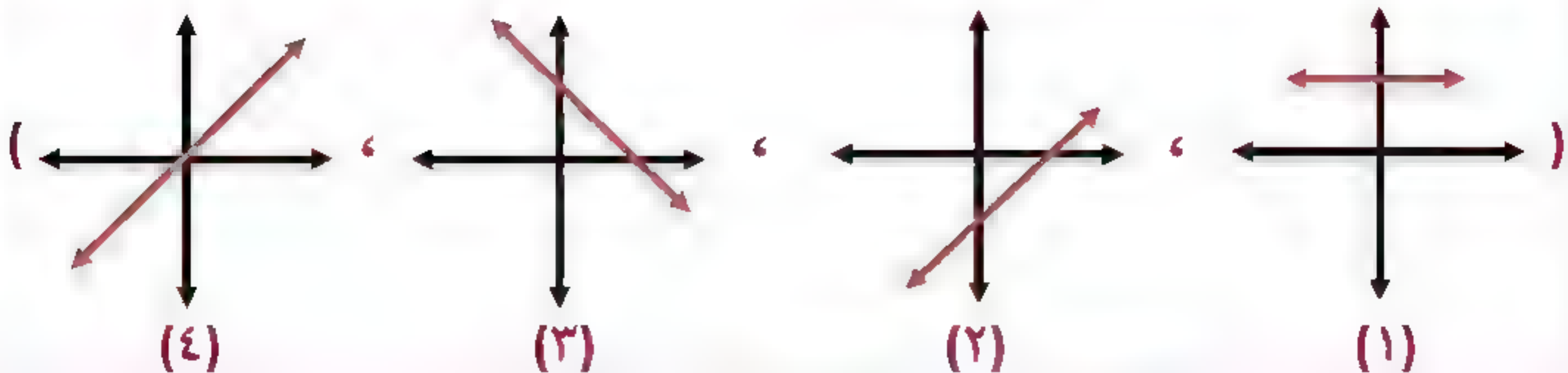
٤ إذا كان  $s^2 = m$  حيث  $m$  ثابت  $\neq 0$  فإن  $s$  تتغير عكسياً مع .....  
(  $\frac{1}{s^2}$  ،  $\frac{1}{s}$  ،  $s$  ،  $s^2$  )

العلاقة بين  $s$  ،  $s$  علاقة تتغير:

٢	٥	١	<b>س</b>
٦	١٥	٣	<b>ص</b>

( طردى ، عكسى ، لا طردى ولا عسى )

٦ الشكل الذى يمثل علاقة طردية هو شكل .....





## نمارين

<p>(١) إذا كانت ص <math>\infty</math> س وكانت ص = ٦ عند س = ٣ أوجد</p> <p>١- العلاقة بين ص ، س</p> <p>٢- قيمة س عند ص = ٢٠</p>	<p>(٧)</p>	<p>إذا كان وزن جسم على الأرض و يتناسب طردياً مع وزنه على القمر فإذا كان ١ = ١٨٢ كجم ، ١ = ٣٥ كجم أوجد ٢ عندما ٢ = ٣١٢ كجم</p>								
<p>(٢) إذا كانت ص <math>\infty</math> س وكانت ص = ٢ عند س = ٣ أوجد</p> <p>١- العلاقة بين ص ، س</p> <p>٢- قيمة ص عند س = ٦</p>	<p>(٨)</p>	<p>إذا كان : <math>\frac{١٢-٢}{٣+٢} = \frac{١}{٣}</math></p> <p>أثبت أن : ١ <math>\infty</math> ٢</p>								
<p>(٣) إذا كانت ص <math>\infty</math> س وكانت ص = ١٠ عند س = ٢ أوجد</p> <p>١- العلاقة بين ص ، س</p> <p>٢- قيمة ص عند س = ٣</p>	<p>(٩)</p>	<p>إذا كان :-</p> <p>ص <math>٢</math> - <math>١٠</math> س ص + <math>٢٥</math> س <math>٢</math> =</p> <p>أثبت أن : ص <math>\infty</math> س</p>								
<p>(٤) إذا كان ص <math>\infty</math> س <math>٢</math> وكانت ص = ٨ عندما س = ٢ أوجد</p> <p>١- العلاقة بين ص ، س</p> <p>٢- قيمة ص عند س = ٣</p>	<p>(١٠)</p>	<p>إذا كان :- ص <math>\infty</math> <math>\frac{١}{س}</math> وكانت ص = ٣ عند س = ٢ أوجد</p> <p>١- العلاقة بين ص ، س</p> <p>٢- قيمة ص عندما س = ١,٥</p>								
<p>(٥) إذا كان ص = ٣ + ١ وكان ١ <math>\infty</math> س ، ص = ٨ عند س = ١ أوجد</p> <p>١- العلاقة بين ص ، س</p> <p>٢- أوجد س عند ص = ١٨</p>	<p>(١١)</p>	<p>إذا كان :- ص <math>\infty</math> <math>\frac{١}{س}</math> وكانت ص = ١٠ عند س = ٣ أوجد</p> <p>١- العلاقة بين ص ، س</p> <p>٢- قيمة ص عندما س = ٥</p>								
<p>(٦) فى الشكل علاقة بين ص ، س</p> <table border="1" data-bbox="1362 2252 1866 2415"> <tr> <td>س</td> <td>٢</td> <td>٥</td> <td>٦</td> </tr> <tr> <td>ص</td> <td>٤</td> <td>١٠</td> <td>١٢</td> </tr> </table> <p>(أ) بين نوع التغير بين ص ، س</p> <p>(ب) أوجد ثابت التغير</p> <p>(ج) أوجد قيمة ص عندما س = ٣</p> <p>(د) أوجد قيمة س عندما ص = ٨</p>	س	٢	٥	٦	ص	٤	١٠	١٢	<p>(١٢)</p>	<p>إذا كانت :- ص تتغير عكسياً مع س وكانت ص = ١ عندما س = ٣ أوجد</p> <p>١- العلاقة بين ص ، س</p> <p>٢- قيمة ص عندما س = ٦</p>
س	٢	٥	٦							
ص	٤	١٠	١٢							





إذا كان  $v = 3 + u$  وكان  $u \propto \frac{1}{s}$  وكانت  
 $v = 5$  عندما  $s = 1$  أوجد  
 ١- العلاقة بين  $v$  ،  $s$   
 ٢- قيمة  $v$  عندما  $s = 2$

(١٤)

إذا كان :-  $v \propto \frac{1}{s^2}$  وكانت  
 $v = 1$  عند  $s = 2$  أوجد  
 ١- العلاقة بين  $v$  ،  $s$   
 ٢- قيمة  $s$  عند  $v = \frac{1}{4}$

(١٣)

إذا كان مقدار السرعة  $v$  التى تخرج بها  
 الماء من فوهة خرطوم يتغير عكسياً مع  
 تغير مربع طول نصف قطر فوهة  
 الخرطوم نق وكانت  $v = 27$  سم عندما  
 نق  $= 10,5$  سم أوجد  $v$  عندما نق  $= 15,75$  سم

(١٦)

فى الشكل علاقة بين  $v$  ،  $s$

١٢	٦	٨	٣	$s$
٢	٤	٣	٨	$v$

(١) بين نوع التغير بين  $v$  ،  $s$   
 (ب) أوجد ثابت التغير  
 (ج) أكتب العلاقة بين  $v$  ،  $s$   
 (د) أوجد قيمة  $v$  عندما  $s = 48$   
 (هـ) أوجد قيمة  $s$  عندما  $v = 12$

(١٥)

إذا كان :  $s^2 v^2 - 14s^2 v + 49 = 0$   
 أثبت أن :  $v \propto \frac{1}{s^2}$

(١٨)

إذا كان :  $s^2 v^2 - 6s^2 v + 9 = 0$   
 أثبت أن :  $v \propto \frac{1}{s^2}$

(١٧)

إذا كان :  $s$  ،  $v$  موجبان وكان  
 $s^2 v^2 - 9 = 0$

(١٩)

أثبت أن :  $v \propto \frac{1}{s}$





## الدرس العاشر

## الإحصاء

### جمع البيانات

#### مصادر جمع البيانات

مصادر ثانوية  
تاريخية

مصادر أولية  
(مصادر ميدانية)

#### أسلوب جمع البيانات

العينات

الحصر الشامل

#### كيفية اختيار العينة

عينة عشوائية  
التجربة - الاختيار - السؤال

عينة عمدية  
اختيار - تجربة - السؤال

#### أنواع العينات العشوائية

عينة عشوائية بسيطة

عينة عشوائية مركبة





## النشئة

هو التجانس بين مجموعة قيم (مفردات)  
\* مقاييس التشتت ١- المدى ٢- الانحراف المعياري

هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لمجموعة  
مفردات  
فمثلاً  
٢-

١ = {٦٠، ٥١، ٥٥، ٥٣، ٥٨، ٥٧} ب = {٤٧، ٥٢، ٤٩، ٩٢، ٤٤، ٥٠} =  
المدى = ٥١ - ٦٠ = ٩ المدى = ٩٢ - ٤٢ = ٥٠  
\* نلاحظ أن المجموعة ب أكثر تشتتاً من  
المجموعة أ

\* الأكثر تشتتاً ← أقل تجانس  
الأقل تشتتاً ← أكثر تجانس  
تشتت منعدم ← تجانس تام ← المفردات  
متساوية

## أولاً : المدى

هو أرق مقاييس التشتت  
هو الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات  
انحرافات قيم المتغير عند وسطها الحسابي  
١- الانحراف المعياري لعدة قيم (مفردات)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (s - \bar{s})^2}{n}}$$

$$\bar{s} = \frac{\text{مجموع قيم}}{\text{عدد قيم}} = \text{الوسط الحسابي}$$

$$\bar{s} = \frac{\sum s}{n}$$

حيث  $n$  عدد القيم (المفردات)

ثانياً : الانحراف  
المعياري





(٢) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للقيم ٦، ٥، ٧، ٩، ١١، ٤

الحل

$$\bar{x} = \frac{6+5+7+9+11+4}{6} = 7$$

س	س - $\bar{x}$	(س - $\bar{x}$ ) <sup>٢</sup>
٦	٦ - ٧ = -١	١
٥	٥ - ٧ = -٢	٤
٧	٧ - ٧ = ٠	٠
٩	٩ - ٧ = ٢	٤
١١	١١ - ٧ = ٤	١٦
٤	٤ - ٧ = -٣	٩

$$\sum = 34$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{34}{6}} = 2.38$$

(١) احسب الانحراف المعياري للقيم ٢، ٣، ٤، ٥، ٦

الحل

$$\bar{x} = \frac{2+3+4+5+6}{5} = 4$$

س	س - $\bar{x}$	(س - $\bar{x}$ ) <sup>٢</sup>
٢	٢ - ٤ = -٢	٤
٣	٣ - ٤ = -١	١
٤	٤ - ٤ = ٠	٠
٥	٥ - ٤ = ١	١
٦	٦ - ٤ = ٢	٤

$$\sum = 10$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = 1.41$$

## تدريب

(٣) احسب الانحراف المعياري للقيم ٥، ٦، ٧، ٨، ٩

الحل

$$\bar{x} = \dots\dots\dots$$

س
٥
٦
٧
٨
٩

$$\sum =$$

$$\sigma = \sqrt{\dots\dots\dots}$$

٢- حساب الانحراف المعياري لتوزيع تكراري (جدول مجموعات)

$$\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{\sum k} = \sigma^2$$

$$\frac{\sum x \cdot k}{\sum k} = \bar{x}$$

(١) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للتوزيع التكراري الآتي

المجموع	-٤٥	-٣٥	-٢٥	-١٥	-٥	المجموعات
٢٠	٢	٤	٧	٤	٣	التكرار

الحل

المجموعات	ك	س	ك × س	س - $\bar{x}$	(س - $\bar{x}$ ) <sup>٢</sup>	ك × (س - $\bar{x}$ ) <sup>٢</sup>
-٥	٣	١٠	٣٠	١٠ - ٢٩ = -١٩	٣٦١	٣ × ٣٦١ = ١٠٨٣
-١٥	٤	٢٠	٨٠	٢٠ - ٢٩ = -٩	٨١	٤ × ٨١ = ٣٢٤
-٢٥	٧	٣٠	٢١٠	٣٠ - ٢٩ = ١	١	٧ × ١ = ٧
-٣٥	٤	٤٠	١٦٠	٤٠ - ٢٩ = ١٩	٣٦١	٤ × ٣٦١ = ١٤٤٤
-٤٥	٢	٥٠	١٠٠	٥٠ - ٢٩ = ٢١	٤٤١	٢ × ٤٤١ = ٨٨٢
	٢٠	٥٨٠				٢٧٨٠

$$\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{\sum k} = \sigma^2$$

$$11.79 = \frac{2780}{20} =$$

$$\frac{\sum (k \cdot x)}{\sum k} = \bar{x}$$

$$\uparrow 29 = \frac{580}{20} =$$





(٢) أوجد الانحراف المعياري للتوزيع التكراري الآتي

المجموعات	صفر-	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	المجموع
التكرار	٢	٥	١١	١٥	٧	٤٠

الحل

المجموعات	ك	س	ك × س	س - س	(س - س)²	ك × (س - س)²
٠٠	٢	٥	١٠	٥ - ٣٠ = -٢٥	٦٢٥	٢ × ٦٢٥ = ١٢٥٠
-١٠	٥	١٥	٧٥	١٥ - ٣٠ = -١٥	٢٢٥	٥ × ٢٢٥ = ١١٢٥
-٢٠	١١	٢٥	٢٧٥	٢٥ - ٣٠ = -٥	٢٥	١١ × ٢٥ = ٢٧٥
-٣٠	١٥	٣٥	٥٢٥	٣٥ - ٣٠ = ٥	٢٥	١٥ × ٢٥ = ٣٧٥
-٤٠	٧	٤٥	٣١٥	٤٥ - ٣٠ = ١٥	٢٢٥	٧ × ٢٢٥ = ١٥٧٥
						٤٦٠٠

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum K(X - \bar{X})^2}{\sum K}} = \sqrt{\frac{4600}{40}} = 10.724$$

$$\bar{X} = \frac{\sum (K \times X)}{\sum K} = \frac{1200}{40} = 30$$

## تدريب

أوجد الانحراف المعياري للتوزيع التكراري التالي

المجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	المجموع
التكرار	٣	١٠	١٢	١٠	٥	٤٠

الحل

المجموعات	ك	س	ك × س	س - س	(س - س)²	ك × (س - س)²
٠٠	٣					
-١٠	١٠					
-٢٠	١٢					
-٣٠	١٠					
-٤٠	٥					



(٢) أوجد الانحراف المعياري للوحدات التالية للتوزيع التكراري

عدد الوحدات التالية	٠	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

الحل

س	ك	س × ك	س - س	(س - س)²	ك × (س - س)²	Σ ك × (س - س)²	Σ ك
٠	٣	٠	٣ - ٣ = ٠	٠	٣ × ٠ = ٠	٠	٣
١	١٦	١٦	١ - ٣ = -٢	٤	١٦ × ٤ = ٦٤	٦٤	١٦
٢	١٧	٣٤	٢ - ٣ = -١	١	١٧ × ١ = ١٧	١٧	١٧
٣	٢٥	٧٥	٣ - ٣ = ٠	٠	٢٥ × ٠ = ٠	٠	٢٥
٤	٢٠	٨٠	٤ - ٣ = ١	١	٢٠ × ١ = ٢٠	٢٠	٢٠
٥	١٩	٩٥	٥ - ٣ = ٢	٤	١٩ × ٤ = ٧٦	٧٦	١٩
	١٠٠	٣٠٠			٢٠٤		

$$\bar{s} = \frac{\sum s \times k}{\sum k} = \frac{300}{100} = 3 \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum k \times (s - \bar{s})^2}{\sum k}} = \sqrt{\frac{204}{100}} = 1.428$$

## نمارين

(١) أكمل

- ١- مصادر جمع البيانات هي .....
- ٢- من أساليب جمع البيانات هي .....
- ٣- اختيار عينة عشوائية من طبقات المجتمع تسمى بالعينة .....
- ٤- من مقاييس التشتت .....
- ٥- من مقاييس النزعة المركزية .....
- ٦- الجذر التربيعي لمجموع مربعات انحرافات القيم عند وسطها الحسابي هو .....
- ٧- أبسط مقاييس التشتت .....
- ٨- أدق مقاييس التشتت .....
- ٩- المجموعات الأكثر تجانساً يكون فيها التشتت .....
- ١٠- المجموعات الأقل تجانساً يكون فيها التشتت .....
- ١١- عندما يكون التشتت = صفر فإن جميع المفردات .....
- ١٢- المدى للقيم ٥، ١، ٧، ٣ هو .....
- ١٣- المدى للقيم ٧، ٧، ٧ هو .....
- ١٤- إذا كان المدى لمجموعة هو ٤٠ وكان أصغر القيم ١٧ فإن أكبر القيم يساوي .....





(٢) أحسب المدى والانحراف المعياري

١ ٩، ١٠، ٢، ٤، ٥

ب ٢٧، ٢٠، ٥، ٣٢، ١٦

ج ٦، ٩، ٨، ٧، ٥

د ٨، ٢٠، ٢٠، ٢٠، ٢٢

(٣) احسب الانحراف المعياري للتوزيعات التكرارية التالية

١

المجموعات	-١٦	-١٢	-٨	-٤	-٠	المجموع
التكرار	٢	٤	٨	٤	٢	٢٠

ب

المجموعات	-٤٥	-٣٥	-٢٥	-١٥	-٥	المجموع
التكرار	٥	١٠	١٢	١٠	٢	٤٠

ج

المجموعات	-٤٠	-٣٠	-٢٠	-١٠	-٠	المجموع
التكرار	٧	١٥	١١	٥	٢	٤٠

د

العمر بالسنوات	١٢	١٠	٩	٨	٥	المجموع
عدد الاطفال	١	٣	٣	٢	١	١٠

هـ

الدرجة	٦	٥	٤	٣	٢	المجموع
عدد الطلاب	١	٤	٥	٤	١	١٥

# أولاً : حساب المثلثات

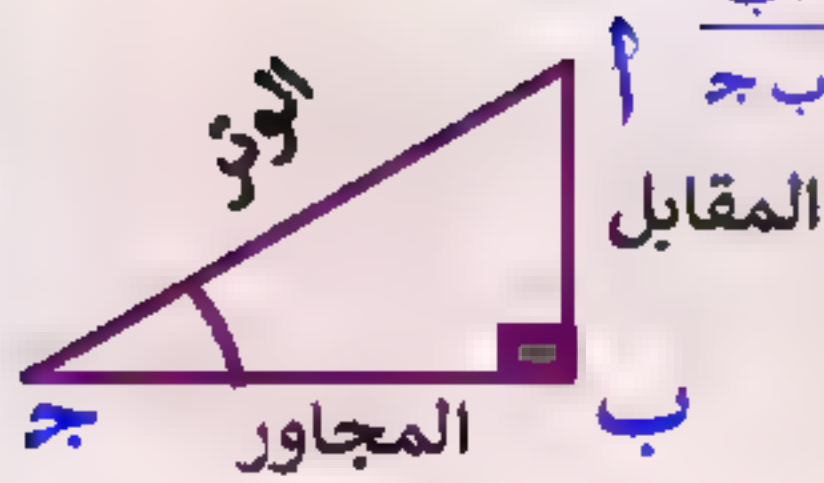
## وحدات قياس الزاوية

## الدرس الأول

درجات	نقط	←	درجات	-دقائق	- ثواني
°	'	←	°	'	"
1	60	←	1	60	60
2	120	←	2	120	120
3	180	←	3	180	180
4	240	←	4	240	240
5	300	←	5	300	300
6	360	←	6	360	360

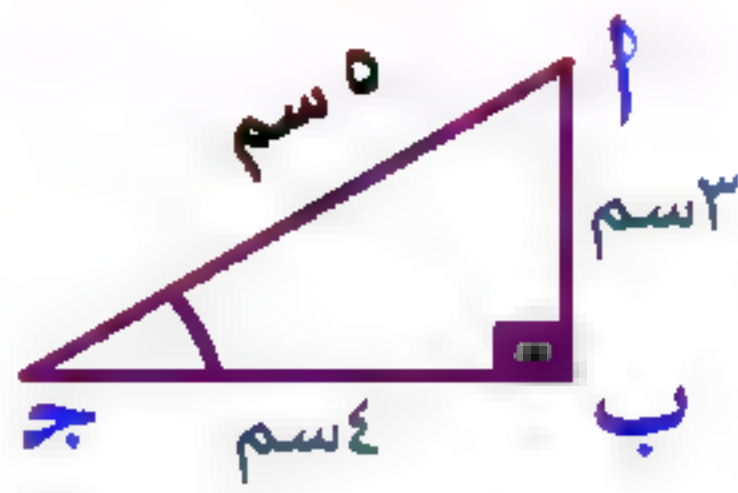
الدرجة - الدقيقة  
- الثانية

1	جاء	=	$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	=	$\frac{\text{أب}}{\text{أج}}$
2	جناج	=	$\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$	=	$\frac{\text{بج}}{\text{أج}}$
3	ظاج	=	$\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	=	$\frac{\text{أب}}{\text{بج}}$



النسب المثلثية  
للزاوية الحادة





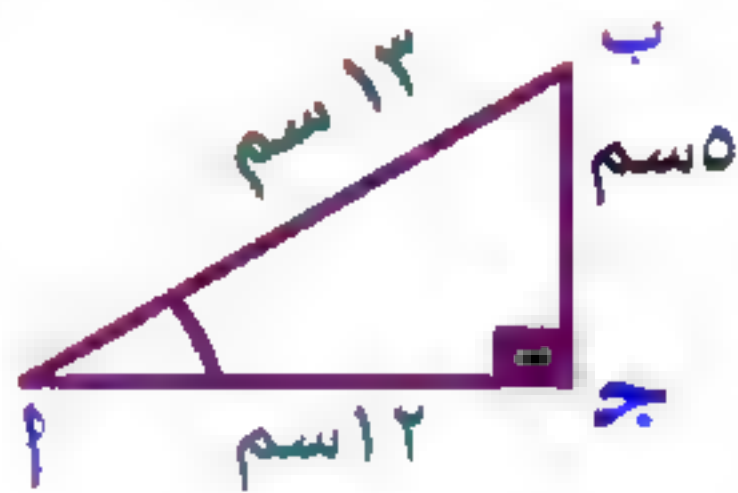
(١) أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب فيه أ ب = ٣ سم  
ب ج = ٤ سم أوجد النسب المثلثية للزاويتين ج، أ  
الحل

$$أ ب ج = \sqrt{٣^2 + ٤^2} = ٥ \text{ سم}$$

$$\frac{٣}{٥} = \text{جا أ}$$

$$\frac{٤}{٥} = \text{جتا ج}$$

$$\frac{٣}{٤} = \text{ظا ج}$$



(٢) أ ب ج مثلث فيه ٩٠ = (ج)، أ ب = ١٢ سم

$$أ ب ج = ١٢ \text{ سم}$$

١- أوجد النسب المثلثية للزاويتين أ، ب

٢- برهن أن: جتا جتا ب + جتا جتا ب = ١

٣- أوجد قياس زاوية أ

الحل

$$أ ب ج = \sqrt{١٢^2 - ٥^2} = ١٣ \text{ سم}$$

١-

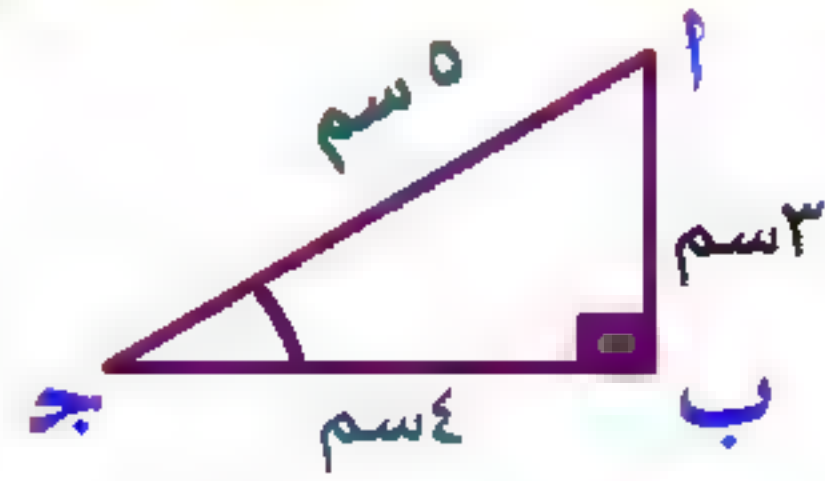
$$\frac{٥}{١٣} = \text{جا أ}$$

$$\frac{١٢}{١٣} = \text{جتا ج}$$

$$\frac{٥}{١٢} = \text{ظا ج}$$

$$١ = \left(\frac{١٢}{١٣}\right)\left(\frac{١٢}{١٣}\right) + \left(\frac{٥}{١٣}\right)\left(\frac{٥}{١٣}\right) = \text{جتا جتا ب} + \text{جتا جتا ب}$$

$$\text{SH } \sin\left(\frac{5}{13}\right) = \text{''''} \quad ٢٢^\circ ٣٧' ١١ = (أ) \quad ٣-$$



(٣) أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب فيه أ ج = ٥ سم  
ب ج = ٤ سم

أوجد ١- النسب المثلثية للزاويتين ج ، أ

٢- قيمة ظا اظا ج + ٢

٣- قياس زاوية ج

الحل

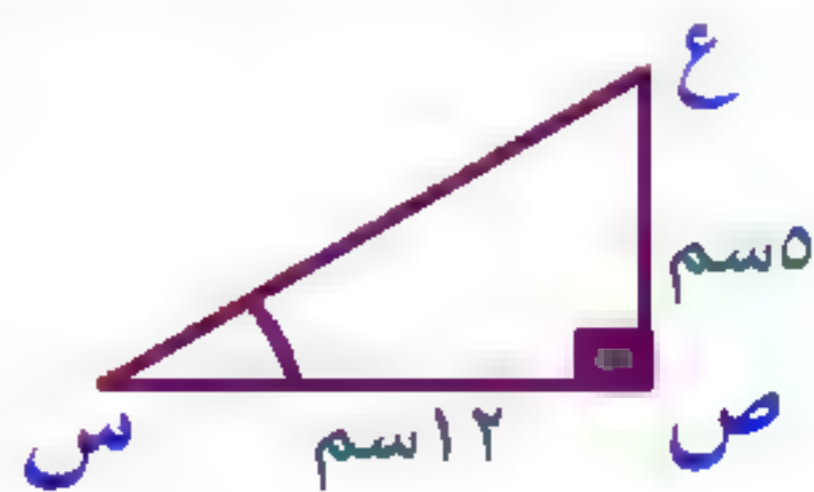
$$أ ب = \sqrt{٥^2 - ٤^2} = ٣ \text{ سم}$$

$$\begin{aligned} ١- \text{جا ج} &= \frac{٣}{٥} & \text{جا أ} &= \frac{٤}{٥} \\ \text{جتا ج} &= \frac{٤}{٥} & \text{جتا أ} &= \frac{٣}{٥} \\ \text{ظا ج} &= \frac{٣}{٤} & \text{ظا أ} &= \frac{٤}{٣} \end{aligned}$$

$$٢- \text{ظا اظا ج} = \frac{٣}{٤} \times \frac{٤}{٣} = ١ = ٢ + ١ = ٣$$

$$٣- \text{و (ج)} = ١١ = ٣٧ - ٢٢ \quad \text{و} \cos\left(\frac{4}{5}\right) = \text{و}$$

## تمرين



أكمل من الشكل المرسوم

١- ع س = .....

٢- جاس = .....

جا ع = .....

جتا س = .....

ظاس = .....

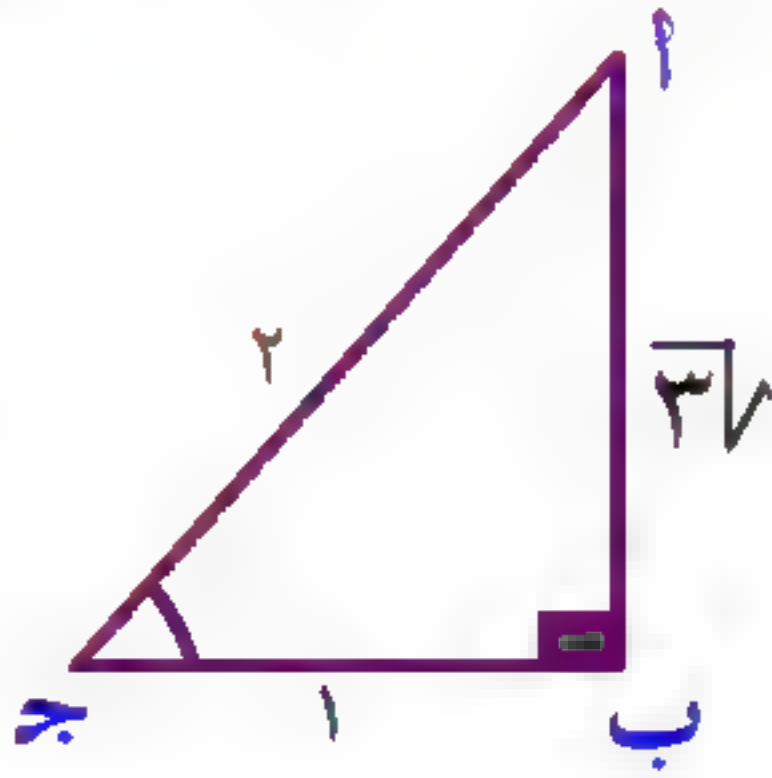
جتا ع = .....

ظا ع = .....

٣- جتا<sup>٢</sup> س + جا<sup>٢</sup> ع = .....

٤- و (س) = .....





(٤) أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب فإذا كان  $AB = 2$   $BC = 3$  أ ب ج  
أ ب ج = فأوجد

١- النسب المثلثية للزاوية ج

٢-  $\sin(A)$

الحل

$$\therefore AB = 2 \quad BC = 3$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \leftarrow \frac{3}{4} = \frac{BC}{AC} \quad \text{مقابل وتر}$$

$$1 = \sqrt{(3)^2 - (2)^2} = BC$$

$$1- \text{جاء} = \frac{3}{2} \quad \text{جنا} = \frac{1}{2} \quad \text{ظا} = 3$$

$$2- \text{جاء} = \frac{1}{2}$$

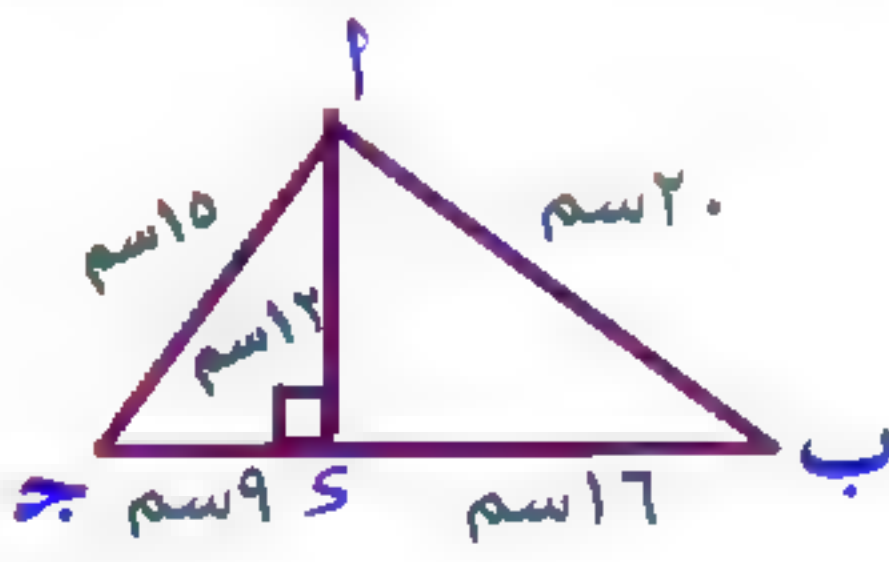
$$\therefore \sin(A) = \frac{1}{2} = 30^\circ$$

(٥) أ ب ج في الشكل المرسوم : أوجد

١- جاب، جنا

٢- ظا، طا

٣- جنا (ب ا) - جاب (ب ا)



الحل

$$\text{في } \triangle ABC \rightarrow AC = 12 \quad BC = 16 \quad AB = 20$$

$$\text{في } \triangle ABC \rightarrow AB = 20 \quad AC = 12 \quad BC = 16$$

$$1- \text{جاء} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \quad \text{جنا} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$2- \text{ظا} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \quad \text{طا} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$3- \text{جنا (ب ا)} - \text{جاب (ب ا)} = \left(\frac{16}{20}\right) - \left(\frac{12}{20}\right) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$



في  $\Delta$  أ ب ج إذا كان  $\angle \text{ب} = 90^\circ$

$\angle \text{أ} + \angle \text{ج} = 90^\circ$  متضمن

١-  $\text{جا} = \text{جنا}$  ←  $\text{جا} - \text{جنا} = \text{صفر}$

$\text{جا} \div \text{جنا} = 1$

$\text{جا} + \text{جنا} = 2 \text{ جا} = 2 \text{ جنا}$

$\text{جا} \times \text{جنا} = \text{جا}^2 = \text{جنا}^2$

٢-  $\text{جنا} = \text{جنا}$

٣-  $\frac{1}{\text{ظا}} = 1$  ←  $\text{ظا} \times \text{ظا} = 1$

ملاحظات

(٦) أكمل

١-  $\text{جا} = 3$   $\text{جنا} = \dots$

٢-  $\text{جا} = 8$   $\text{جنا} = \dots$

٣- إذا كان : زاوية أ تتمم زاوية ب فإن :

$\text{جا} = \dots$   $\text{جنا} = \dots$   $\text{ظا} \times \text{ظا} = \dots$

$\text{جا} - \text{جنا} = \dots$   $\text{جا} \div \text{جنا} = \dots$

(٧) اختر

١-  $\Delta$  أ ب ج قائم في ب فإن  $\text{جا} + \text{جنا} = \dots$

١) جاب ٢) ظاب ٣)  $2 \text{ جا}$  ٤)  $2 \text{ جنا}$

٢- في  $\Delta$  س ص ع فيه  $\angle \text{س} = 90^\circ$  يكون  $\text{ظا ص} = \dots$

١)  $\frac{1}{\text{ظا ع}}$  ٢)  $\frac{1}{\text{ظا ص}}$  ٣)  $\frac{1}{\text{جنا ع}}$  ٤)  $\frac{1}{\text{جنا ص}}$

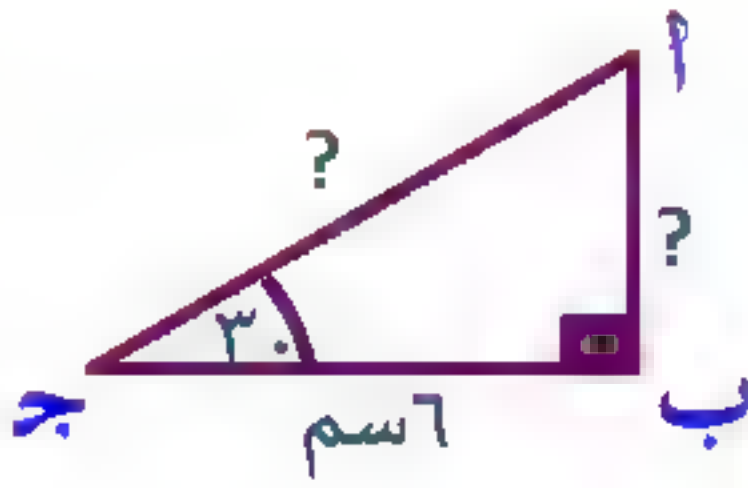
٣- جتا س يمكن أن تساوي .....

١)  $\frac{7}{5}$  ٢)  $\frac{4}{5}$  ٣)  $\frac{3}{5}$  ٤)  $\frac{1}{5}$





(٩) فى الشكل المرسوم  
أوجد طول أب، أج



الحل

من نظرية فيثاغورس

$$اج^2 = 6^2 + (3\sqrt{2})^2$$

$$اج = 6,9 \text{ سم}$$

أب مقابل  
ب ج مجاور

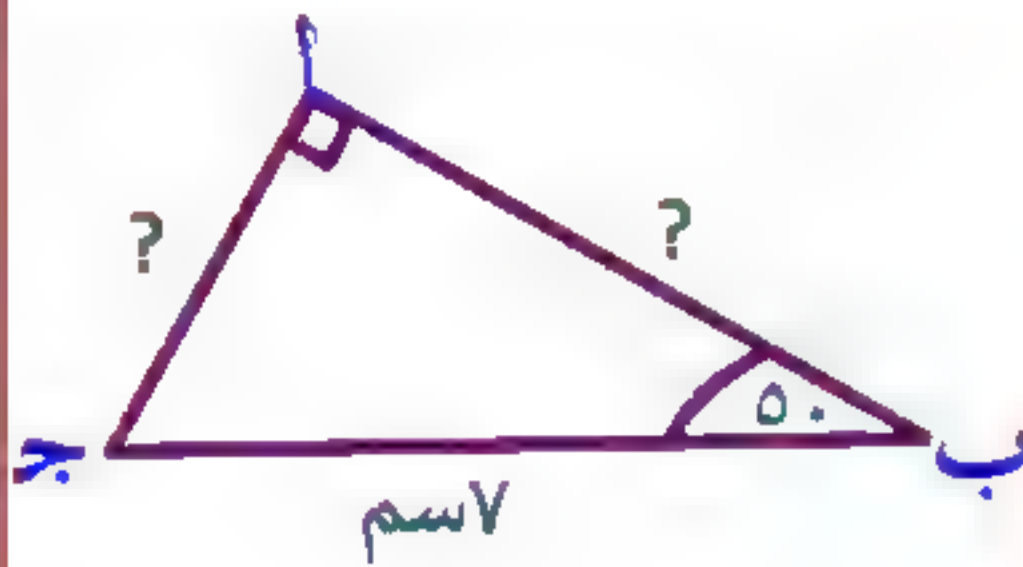
$$\text{ظا } 30^\circ = \frac{أب}{ب ج}$$

$$\frac{أب}{6} = \text{ظا } 30^\circ$$

$$\therefore أب = 6 \times \text{ظا } 30^\circ$$

$$أب = 3\sqrt{2} \approx 3,5 \text{ سم}$$

(٩) فى الشكل المرسوم  
أوجد طول أب، أج



الحل

من نظرية فيثاغورس

$$اج^2 = 7^2 + (4,5)^2$$

$$اج = 5,4 \text{ سم}$$

أب  
ب ج

$$\text{جتا } 50^\circ = \frac{أب}{ب ج}$$

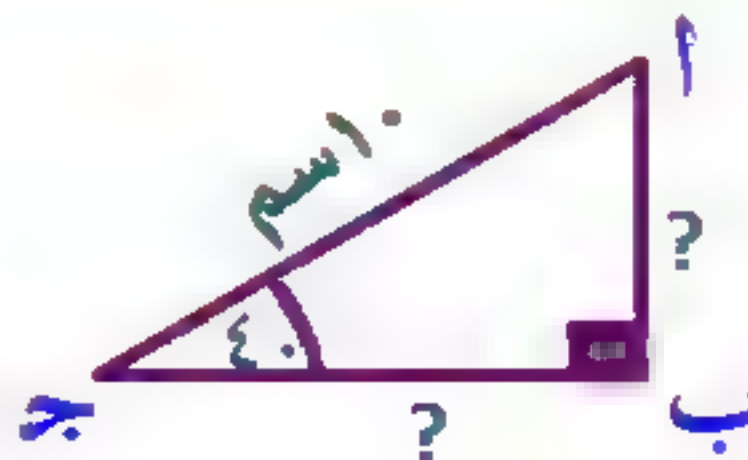
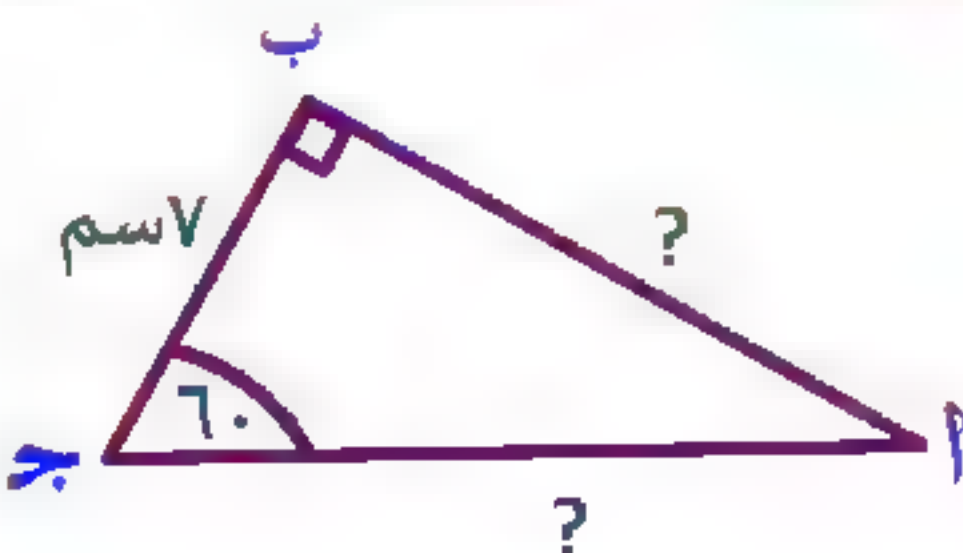
$$\frac{أب}{7} = \text{جتا } 50^\circ$$

$$\therefore أب = 7 \times \text{جتا } 50^\circ$$

$$أب \approx 4,5 \text{ سم}$$

## تمرين

فى الأشكال التالية  
أوجد الأطوال المشار إليها بعلامة ؟





## نـمـاـريـنـ

١- أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب فيه  $AB = 8$  سم ،  $AB = 15$  سم  
أوجد النسب المثلثية للزاويتين أ ، ج

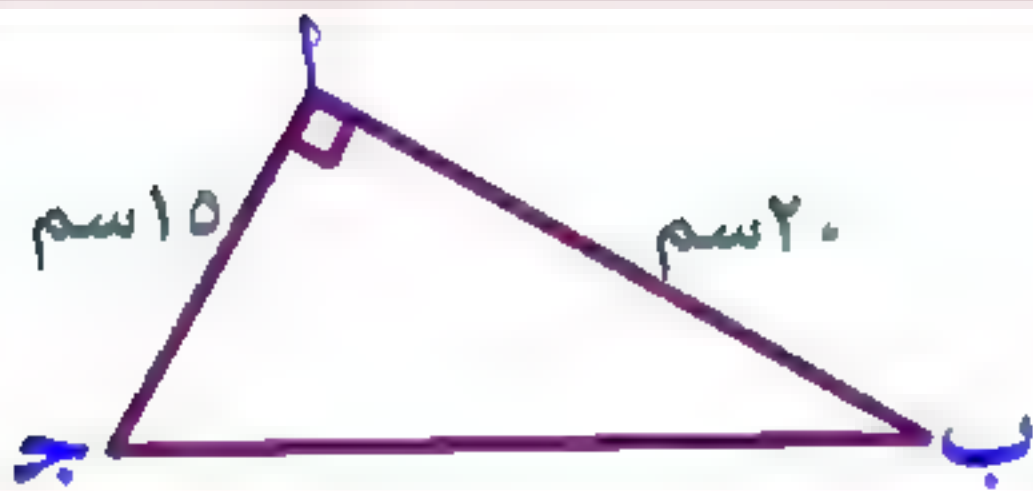
٢- أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب فيه  $AB = 13$  سم ،  $AB = 12$  سم  
١- أوجد النسب المثلثية للزاويتين أ ، ج  
٢- أوجد  $\sin A$  ،  $\cos C$

٣- س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص فيه  $SV = 4$  سم ،  $SE = 5$  سم  
١- أوجد النسب المثلثية للزاويتين س ، ع  
٢- أوجد قيمة :  $\sin A - \cos C$

٤- س ص ع مثلث قائم الزاوية في ع فيه  $SV = 25$  سم ،  $SE = 7$  سم  
١- أوجد قيمة :  $\sin A \times \cos C$   
٢- أوجد قيمة :  $\sin A + \cos C$

٥- فى الشكل المقابل  
أثبت أن

$\sin A - \cos C = 0$



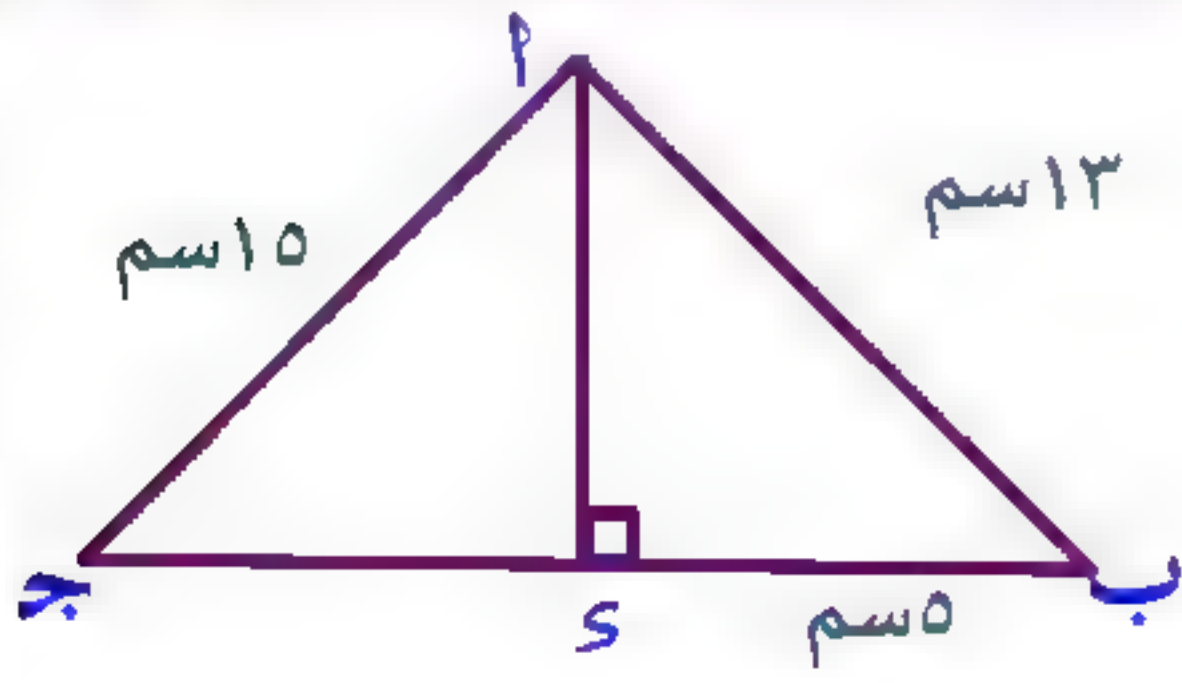
٦- فى  $\triangle ABC$  مثلث قائم الزاوية في (ب) إذا كان :  $AB = 17$  ،  $BC = 15$   
١- أثبت أن :  $\sin A - \cos C = 0$   
٢- أوجد قياس زاوية ج

٧- فى  $\triangle SVE$  إذا كان :  $\sin E = 90^\circ$  ،  $\cos A = \frac{5}{13}$

١- أوجد قيمة :  $\sin A$  ،  $\cos C$   
٢- أوجد قيمة :  $\sin C$

٨- فى  $\triangle ABC$  إذا كان :  $\sin B = 90^\circ$  ،  $AB = 13$  ،  $AC = 12$  = صفر  
١- أوجد قيمة :  $\sin A$  ،  $\cos C$   
٢- أوجد قيمة :  $\sin C$



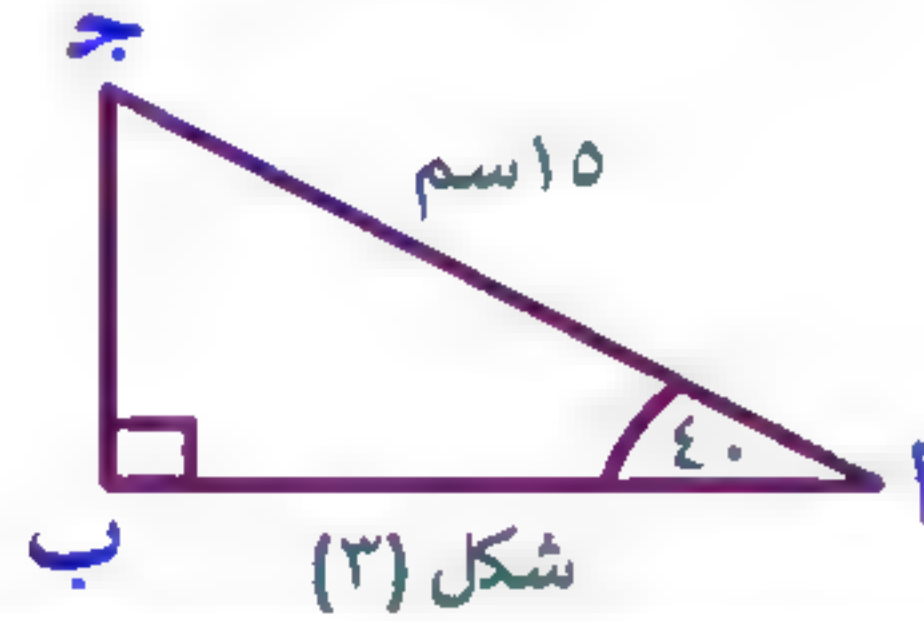
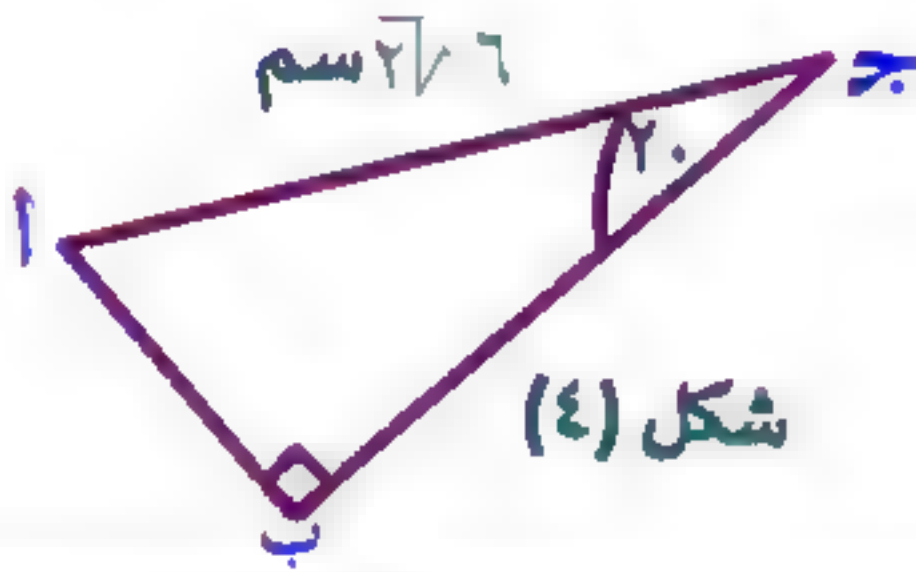
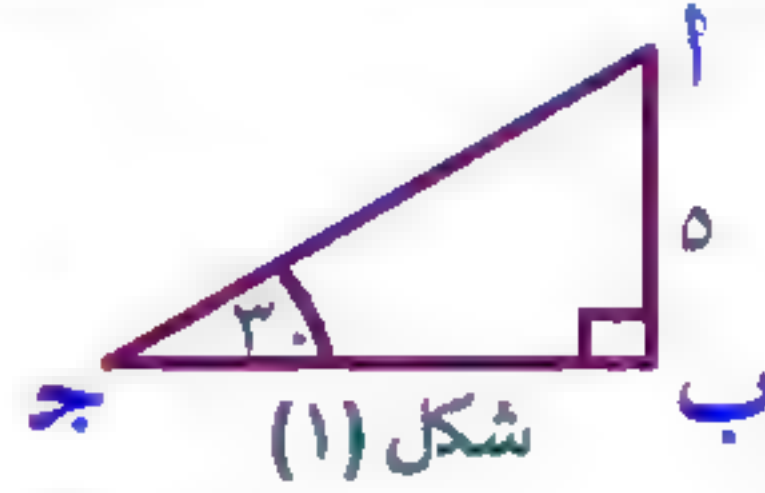
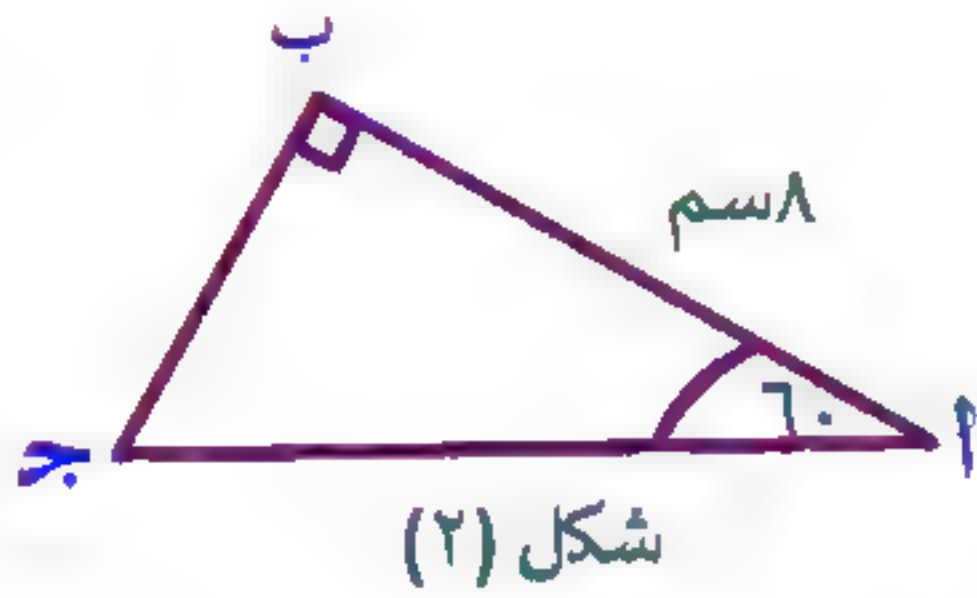


٩ فى الشكل المقابل أثبت أن

$$1. \frac{1}{4} = \frac{\text{زاى}(\text{جأ})}{\text{جنا}(\text{جأ})}$$

$$2. \frac{7}{2} = \frac{\text{زاى}(\text{بأ}) \cdot \text{زاى}(\text{جأ})}{\text{زاى}(\text{جأ}) \cdot \text{زاى}(\text{بأ})}$$

(١٠) فى الاشكال التالية أوجد طول أب، أج





## النسب المثلثية للزوايا الخاصة

## الدرس الثانى

ملاحظات

$$\text{جا } 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{جنا } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{جنا } 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{جا } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{جاه } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{جناه } 60^\circ = \frac{1}{2}$$

جا الزاوية = جناه المتمة

جنا الزاوية = جاه المتمة

الزاوية	30°	60°	45°
النسبة			
جا sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
جنا cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
طا tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1

أولاً بدون الآلة الحاسبة أوجد قيمة ما يلى :

1	$\text{جا } 30^\circ + \text{ظاه } 45^\circ - \text{جنا } 60^\circ = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 1$
2	$2 \text{ جناه } 30^\circ \text{ طا } 60^\circ - 2 \text{ ظاه } 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (\sqrt{2})^2 = \frac{3}{4} - 2 = -\frac{5}{4}$ $2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2 - \frac{9}{2} =$
3	$16 \text{ جا } 60^\circ \text{ جناه } 30^\circ + \text{ظاه } 45^\circ = 16 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 16 = 12 + 16 = 28$ $10 = 1 + 9 = 1 + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times 16 =$
4	$(\text{جنا } 30^\circ - \text{جا } 60^\circ)(\text{جنا } 60^\circ + \text{جا } 30^\circ) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$

## تمارين

1-  $\text{جنا } 60^\circ \text{ جا } 60^\circ + \text{جا } 60^\circ \text{ جناه } 30^\circ$

2-  $4 \text{ جاه } 45^\circ + \text{جا } 30^\circ \text{ جناه } 60^\circ - \text{جناه } 30^\circ$





ثانياً أثبت أن :-

$$1 - 2 \text{ جا } 30^\circ - 3 \text{ ظا } 45^\circ - 6 \text{ جا } 60^\circ$$

الحل

الطرف الأيسر

جا 60°

$$2 \leftarrow \frac{1}{2} =$$

الطرف الأيمن

2 جا 30° - 3 ظا 45°

$$1 - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

$$1 \leftarrow \frac{1}{2} =$$

من 1 ، 2 الطرفين متساويان

$$2 - 1 - 3 \text{ ظا } 30^\circ = \frac{3 \text{ ظا } 60^\circ}{6 \text{ ظا } 60^\circ}$$

الحل

الطرف الأيسر

$$\frac{3 \text{ ظا } 60^\circ}{6 \text{ ظا } 60^\circ}$$

$$\sqrt{3} \div \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2$$

$$2 \leftarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}^2}{3}$$

الطرف الأيمن

3 ظا 30° - 1

$$\left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 1$$

$$1 \leftarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - 1$$

من 1 ، 2 الطرفين متساويان

تمرين

$$3 - \text{أثبت أن } \frac{1 - 3 \text{ جا } 30^\circ}{3 \text{ جا } 30^\circ + 1} = 3 \text{ ظا } 30^\circ$$



۱- س.جاء ۳ جنما ۵۴- جنما ۲۰۳

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_S$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times 3$$

$$3 = 4 \times \frac{3}{4} = \text{س.} \therefore$$

٢- سجاء ٥٢ عطا ٥٢ ٤- ظا ٦٠

$${}^{\gamma}(\sqrt{v}) = {}^{\gamma}(1) \cdot \left( \frac{\sqrt{v}}{1} \right)_{\text{س}}$$

$$\frac{1}{2} \text{ س } = 3 \quad \text{بالتضرب } \times 2$$

$$\therefore 6 = 2 \times 3 = \text{س}$$

۳۔ جاس = ۶، ۶۔

$$SH \sin(0.6) = (,,,) \rightarrow \text{س} = 36^\circ 52' 11''$$

۴- ۲ جاس-ظاء ۶

$$60 = \text{س} \quad \Leftarrow \quad \frac{\sqrt[3]{60}}{2} = \text{جاس} \quad \Leftarrow \quad \sqrt[3]{60} = 2 \text{ جاس}$$

۵۔ جاس = جا<sup>۲</sup> ۶۔ جنا<sup>۲</sup> ۵ جا<sup>۲</sup> ۳۔

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \text{جاس}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \text{جاس}$$

جائے =  $\frac{1}{2}$  ← قس = ۳۰





٦- جاعس = جئاس

الحل

∴ جئ = جئ ∴ الزاويتان متتامتان

$$٤س + ٥س = ٩٠ \Rightarrow ٩س = ٩٠ \Rightarrow س = ١٠^\circ$$

$$٧- جئ (س + ١٥) = \frac{1}{2} \quad SH \cos\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow 60$$

الحل

$$س + ١٥ = ٦٠ \Rightarrow س = ٦٠ - ١٥ = ٤٥^\circ$$

$$٨- ظا (س - ٢٠) = ١ \quad SH \tan(1) \rightarrow 45$$

الحل

$$س - ٢٠ = ٤٥ \Rightarrow س = ٤٥ + ٢٠ = ٦٥^\circ$$

$$٩- جئ = \frac{س}{٢} = \frac{1}{2} \quad SH \sin\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow 30$$

الحل

$$\frac{س}{٢} = ٣٠ \Rightarrow س = ٣٠ \times ٢ = ٦٠^\circ$$

$$١٠- ظا ٢ = \sqrt{3} \quad SH \tan(\sqrt{3}) \rightarrow 60$$

الحل

$$٢س = ٦٠ \Rightarrow س = ٣٠^\circ$$

## تدريب

أوجد قيمة س

$$١- جئ (س - ٢٠) = \frac{1}{2}$$

$$٢- جئ ٢س = ١$$

## نمارين

(١) بدون الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

١- جا ٤ - جتا ٤

٢- ٢ جا ٣ + ٢ جتا ٦

٣- ظا ٣ - ظا ٦

٤- جا ٣ + جتا ٣

٥- جا ٣ + جتا ٦ + ظا ٤

٦- ٢ جا ٤ + ٢ جتا ٤ + ظا ٤

٧- ٢ جا ٥ + ٤ جا ٦ + جتا ٣

٨- ٢ جا ٣ - ١

٩-  $\frac{1}{4}$  جا ٥ - ظا ٦ -  $\frac{1}{3}$  جا ٦ - ظا ٣

١٠- ظا ٥ - جتا ٦ - جتا ٥ جا ٤ - ظا ٦

(٢) أثبت أن :

١- جتا ٦ = ٢ جتا ٣ - ١

٢- ٢ جا ٣ + جتا ٣ = جا ٦

٣- ٥ جتا ٦ - ظا ٥ = جا ٣

٤- جا ٦ + جتا ٣ - جتا ٦ جا ٣ = جا ٥

٥-  $\frac{2 \text{ ظا } 3}{3 - 1 \text{ ظا } 3} = \text{ظا } 6$

٦-  $\frac{3 - 1 \text{ ظا } 3}{2 \text{ ظا } 3} = \text{ظا } 3$

(٣) أوجد قيمة س إذا كان :

١- س جا ٣ = ٤

٢- س ظا ٥ = جا ٣

٣- س جا ٣ + جتا ٥ = جا ٦

٤- س - جتا ٣ - ظا ٣ - ظا ٥ = ٤

٥- جاس = ١ - جتا ٦

٦- ظاس - ظا ٣ = ٣

٧- ٢ جاس - ظا ٦ - ٢ ظا ٥ = ٤

٨- ظاس - ٤ جتا ٦ + جا ٣ = ٣

٩- جاس - جا ٦ - جتا ٥ جا ٤ + جا ٣ = ٣

١٠- ظا ٥ - جتا ٦ - جتا ٥ جا ٤ - ظا ٦ = ٦

١١- جاس - جتا ٦ = ٣

١٢- جاس = جتا (س + ١٠)

١٣- جا (س + ١٠) = جتا (س + ٣٠)

١٤- جاس = ٠,٥

١٥-  $\frac{1}{2}$  جاس =  $\frac{1}{2}$

١٦- جتا ٣ =  $\frac{1}{2}$

١٧- جتا (س + ٥) =  $\frac{1}{2}$

١٨- ظا (س + ١٠) =  $\frac{3}{2}$

١٩- جتا  $\frac{3}{2}$  = جتا  $\frac{3}{2}$

٢٠- ظا (س + ١٥) = ١

٢١- ظا (٢س - ١٠) =  $\frac{1}{2}$





## ثانيا : الهندسة التحليلية

### الدرس الثالث

### البعد بين نقطتين



$$\text{طول } \overline{أب} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{البعد} = \sqrt{\text{مربع فرق السينات} - \text{مربع فرق الصادات}}$$

### الأمثلة

(١) أوجد البعد بين كل نقطتين

١- أ (٥،٣) ، ب (٨،٧)      ٢- ج (-٤،٣) ، د (٥،٠)

٣- س (-٢،١) ، ص (٢،٦)      ٤- هـ (٢،٦) ، و (٠،٥)

الحل

$$\text{البعد} = \sqrt{(\text{فرق السينات})^2 + (\text{فرق الصادات})^2}$$

١- أ ب =  $\sqrt{(٥-٨)^2 + (٣-٧)^2}$  = ٥ وحدة طول

٢- ج د =  $\sqrt{(٣+٥)^2 + (٤+٠)^2}$  = ٢٥ وحدة طول

٣- س ص =  $\sqrt{(٢-٦)^2 + (١+٢)^2}$  = ٥ وحدة طول

٤- هـ و =  $\sqrt{(٦+٥)^2 + (٢-٠)^2}$  = ٥ وحدة طول



(٢) أثبت أن

أ (٤،١) ، ب (٣،٢) ، ج (٣،١٦) تقع على استقامة واحدة

الحل

فكرة المثال : نوجد ثلاث أبعاد يطلع الكبير بيساوي الاتنين الصغيرين

$$أب = \sqrt{(١-٣)^2 + (٤-٢)^2} = \sqrt{٢} \text{ وحدة طول}$$

$$بج = \sqrt{(٣-٣)^2 + (١٦-٢)^2} = \sqrt{١٦} = ٤ \text{ وحدة طول}$$

$$أج = \sqrt{(١-٣)^2 + (١٦-٤)^2} = \sqrt{١٦} = ٤ \text{ وحدة طول}$$

$$\therefore أب + بج = أج$$

 $\therefore$  أ، ب، ج تقع على استقامة واحدة

(٣) أثبت أن النقط

أ (٣،١) ، ب (٤،٦) ، ج (٢،٢) تقع على الدائرة التي مركزها ٢ (١،٢) ثم

$$\text{أوجد محيط الدائرة حيث } \frac{٢٢}{٧} = \pi$$

الحل

فكرة المثال : نوجد ثلاث أبعاد أ، ب، ج يطلعوا متساويين

محيط الدائرة =  $٢\pi$   $\pi$  = مساحة الدائرة =  $\pi$ 

$$أ٢ = \sqrt{(١-٣)^2 + (٢-١)^2} = \sqrt{٥} \text{ وحدة طول}$$

$$ب٢ = \sqrt{(١-٤)^2 + (٢-٦)^2} = \sqrt{٥} \text{ وحدة طول}$$

$$ج٢ = \sqrt{(١-٢)^2 + (٢-٢)^2} = \sqrt{٥} \text{ وحدة طول}$$

$$\therefore أ٢ = ب٢ = ج٢$$

 $\therefore$  النقط أ، ب، ج تقع على الدائرة م

$$\therefore \pi = ٥ \text{ وحدة طول}$$

$$\therefore \text{محيط الدائرة} = ٢\pi = ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٥ = ٣١,٤٢ \text{ وحدة طول}$$



## تمارين

(١) أوجد البعد بين كل نقطتين

١- أ (٤،٣) ، ب (٨،٦)

٢- ج (٣،٢-) ، د (١١،٤)

(٢) أثبت أن النقط

أ (٤،١) ، ب (٢،٣-) ، ج (١٦،٣-) تقع

على استقامة واحدة

(٣) إذا كان البعد بين النقطتين

أ (٤،١) ، ب (٢،٥) وكان أ ب = ٥ وحدات

أوجد ك

(٤) إذا كان البعد بين النقطتين

أ (٧،٤) ، ب (٣،٢-) هو ٥ وحدات

أوجد ك

الحل

أ ب =  $\sqrt{(٣-٧)^2 + (٢+٤)^2} = ٥$  بتربيع

الطرفين

$٢٥ = ١٦ + (٢+٤)^2$

$١٦ - ٢٥ = (٢+٤)^2$

$٩ = (٢+٤)^2$  بأخذ الجذر

$٣ \pm = (٢+٤)$

$٣- = ٢+٤ \quad | \quad ٣ = ٢+٤$

$٢-٣- = ٤ \quad | \quad ٢-٣ = ٤$

$٥ = ٤ \quad | \quad ١ = ٤$

## ملاحظة

(١) مساحة المربع = الضلع  $\times$  نفسه

$\frac{1}{4}$  مربع طول قطره =

(٢) مساحة المستطيل = الطول  $\times$  العرض

(٣) مساحة المعين =  $\frac{1}{2}$  ضرب القطرين

(٤) مساحة المثلث =  $\frac{1}{2} \times$  القاعدة  $\times$  الارتفاع

(٥) مساحة الدائرة =  $\pi r^2$

(٦) محيط الدائرة =  $2\pi r$

(٧) محيط أي مضلع = مجموع أطوال أضلاعه

(٨) مساحة شبه المنحرف =  $\frac{1}{2} \times$  مجموع

القاعدتين  $\times$  الارتفاع

(٥) إذا كان البعد بين النقطتين

أ (١،٥) ، ب (١،٤-) وكان أ ب =  $2\sqrt{2}$

وحدة أوجد قيمة ك

الحل

أ ب =  $\sqrt{(١+١)^2 + (٥-٤)^2} = 2\sqrt{2}$

بتربيع الطرفين

$٨ = ٤ + (٥-٤)^2$

$٤ = (٥-٤)^2$  بأخذ الجذر

$٢ \pm = ٥-٤$

$٢- = ٥-٤ \quad | \quad ٢ = ٥-٤$

$٣ = ٤ \quad | \quad ٧- = ٤$



(٦) أثبت أن النقط أ (٢، ٣) ، ب (١-، ١-) ، ج (٣-، ٤-) ، د (٦، ٠) هي رؤوس مربع وأوجد مساحته

الحل

الفكرة : نثبت أن ١- جميع الاضلاع متساوية

٢- القطران متساويان

$$أب = \sqrt{(1+3)^2 + (1+2)^2} = ٥ \text{ وحدة طول}$$

$$بج = \sqrt{(1+4-)^2 + (1+3)^2} = ٥ \text{ وحدة طول}$$

$$جـد = \sqrt{(4+٠)^2 + (3-٦)^2} = ٥ \text{ وحدة طول}$$

$$أد = \sqrt{(3-٠)^2 + (٢-٦)^2} = ٥ \text{ وحدة طول}$$

∴ جميع الأضلاع متساوية في الطول ← ١

$$أج = \sqrt{(3-4-)^2 + (٢-3)^2} = ٢\sqrt{٥} \text{ وحدة طول}$$

$$بـد = \sqrt{(1+٠)^2 + (1+٦)^2} = ٢\sqrt{٥} \text{ وحدة طول}$$

∴ القطران متساويان ← ٢

من ١ ، ٢ ∴ الشكل مربع

∴ مساحة المربع = طول الضلع × نفسه  $٥ \times ٥ = ٢٥$  وحدة مربعة

## تمرين

أثبت أن الرؤوس أ (١-، ١-) ، ب (٣-، ٦-) ، ج (٢-، ١٠-) ، د (٥-، ٦) هي رؤوس مربع ثم أوجد مساحة سطحه





(٧) أثبت أن النقط أ(١،٥) ، ب(٥،١) ، ج(٣،١) ، د(٣،-١) هي رؤوس مستطيل وأوجد مساحته

الحل

الفكرة : نثبت أن ١- كل ضلعان متقابلان متساويان

٢- القطران متساويان

$$أب = \sqrt{(٥-١)^2 + (١-٥)^2} = ٢\sqrt{٤} \text{ وحدة طول}$$

$$بج = \sqrt{(٣-٥)^2 + (١+١)^2} = ٢\sqrt{٢} \text{ وحدة طول}$$

$$جس = \sqrt{(١+٣)^2 + (١+٣)^2} = ٢\sqrt{٤} \text{ وحدة طول}$$

$$سا = \sqrt{(١+١)^2 + (٣-٥)^2} = ٢\sqrt{٢} \text{ وحدة طول}$$

∴ كل ضلعان متقابلان متساويان ← ١

$$أج = \sqrt{(٣-١)^2 + (١+٥)^2} = ٢\sqrt{٢} \text{ وحدة طول}$$

$$بس = \sqrt{(١+٥)^2 + (٣-١)^2} = ٢\sqrt{٢} \text{ وحدة طول}$$

∴ القطران متساويان فى الطول ← ٢

من ١ ، ٢ ∴ الشكل مستطيل

مساحة المستطيل = أج × بج =  $٢\sqrt{٢} \times ٢\sqrt{٤} = ١٦$  وحدة مربعة

## تمرين

أثبت أن النقط أ(١،٠) ، ب(٥،٤) ، ج(٨،١) ، د(٤،٣) هي رؤوس مستطيل ثم أوجد مساحة سطحه



(٨) أثبت أن النقط أ (٣،٣) ، ب (٩،٥) ، ج (٧،١) ، د (١،٣) هي رؤوس معين وأوجد مساحته

الحل

الفكرة : ١- جميع الأضلاع متساوية

٢- القطران غير متساويان

$$أب = \sqrt{(3-9)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ وحدة طول}$$

$$بج = \sqrt{(9-7)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ وحدة طول}$$

$$جس = \sqrt{(7-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ وحدة طول}$$

$$سا = \sqrt{(3-1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{4 + 0} = \sqrt{4} = 2 \text{ وحدة طول}$$

∴ كل الأضلاع متساوية ← ١

$$أج = \sqrt{(3-7)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ وحدة طول}$$

$$بس = \sqrt{(9-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \text{ وحدة طول}$$

∴ القطران غير متساويان ← ٢

من ١ ، ٢ ∴ الشكل أبجس معين

$$\text{مساحة المربع} = أج \times بج = 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 20 = ٤ \times ٥ \text{ وحدة مربعة}$$

## تمرين

أ (٢،٥) ، ب (٢،٢) ، ج (٢،١) ، د (٦،٢) أثبت أن أبجس معين وأوجد مساحته



## ملاحظة

نوع المثلث من حيث

١- أضلاعه :

متساوي الأضلاع - متساوي الساقين - مختلف الأضلاع

(٢) زواياه :

قائم الزوية - منفرج الزوية - حاد الزوايا

لتحديد نوع  $\Delta$  أ ب ج من حيث زواياه وليكن أ ج أكبر ضلع\*  $\Delta$  قائم إذا كان  $\angle(أ) = \angle(أ) + \angle(ب)$ \*  $\Delta$  منفرج إذا كان  $\angle(أ) < \angle(أ) + \angle(ب)$ \*  $\Delta$  حاد الزوايا إذا كان  $\angle(أ) > \angle(أ) + \angle(ب)$ 

(٩) هل  $\Delta$  الذي رؤوسه أ (٢-١) ، ب (-٤، ٢) ، ج (٦، ١) متساوي الساقين أم متساوي الأضلاع

الحل

الفكرة: نوجد أبعاده الثلاثة

$$أب = \sqrt{(٢-١)^2 + (-٤-٢)^2} = \sqrt{١+٣٦} = \sqrt{٣٧} \text{ وحدة طول}$$

$$بج = \sqrt{(٦-٢)^2 + (١-٢)^2} = \sqrt{١٦+١} = \sqrt{١٧} \text{ وحدة طول}$$

$$أج = \sqrt{(٦-١)^2 + (١-٢)^2} = \sqrt{٢٥+١} = \sqrt{٢٦} \text{ وحدة طول}$$

$$أب \neq بج \neq أج$$

∴  $\Delta$  ب ج متساوي الساقين

## تدريب

أثبت أن  $\Delta$  أ ب ج رؤوسه أ (٤، ٢) ، ب (١، ٣) ، ج (٥، ٤) متساوي الساقين



(١٠) أثبت أن النقط أ (١٠، ٣) ، ب (٥، ٨) ، ج (٢، ٥) هي رؤوس  $\Delta$  قائم الزوية ثم أوجد مساحة سطحه

الحل

الفكرة : نوجد الثلاث أبعاد ونقارن مربع أكبر ضلع مع مجموع مربعي الضلعين الآخرين.

$$أب = \sqrt{(١٠-٥)^2 + (٣-٨)^2} = \sqrt{٢٥} \text{ وحدة طول}$$

$$بج = \sqrt{(٥-٢)^2 + (٨-٥)^2} = \sqrt{١٠} \text{ وحدة طول}$$

$$أج = \sqrt{(١٠-٢)^2 + (٣-٥)^2} = \sqrt{١٧} \text{ وحدة طول}$$

\* ملاحظة :  $\Delta$  مختلف الاضلاع

$\sqrt{٢٥} + \sqrt{١٠}$	$\sqrt{١٧}$
$\sqrt{٢٥} + \sqrt{١٠} = ٦.٨ \leftarrow ٢$	$\sqrt{١٧} = ٤.١ \leftarrow ١$

$$\text{من ١ ، ٢} \therefore \sqrt{٢٥} + \sqrt{١٠} = \sqrt{١٧}$$

$\therefore \Delta$  أبج قائم الزوية فى ب

$$\text{مساحة } \Delta \text{ أبج} = \frac{١}{٢} \times أب \times بج = \frac{١}{٢} \times \sqrt{٢٥} \times \sqrt{١٠} = ١٥ \text{ وحدة مربعة}$$

تدريب

أثبت أن النقط أ (٤، ١) ، ب (٨، ٤) ، ج (١، ٥) رؤوس  $\Delta$  قائم وأوجد مساحته





## نمارين

(١) أوجد طول $\overline{AB}$ في كل مما يأتي :	
١ $A(2,3)$ ، $B(8,6)$	٢ $A(1,3)$ ، $B(-1,1)$ $AB = 5$
٢ $A(0,0)$ ، $B(-3,-4)$	وحدة طول
٣ $A(1,5)$ ، $B(4,1)$	٣ $A(2,1)$ ، $B(3,1)$ $AB = \sqrt{2}$
٤ $A(0,6)$ ، $B(-4,0)$	وحدة طول
(٢) أثبت أن $A, B, C$ تقع على استقامة واحد في كل من :	(٥) أثبت أن الشكل $ABCD$ مربع وأوجد مساحة سطحه في كل من :
١ $A(3,5)$ ، $B(2,3)$ ، $C(1,1)$	١ $A(4,2)$ ، $B(-3,0)$
٢ $A(3,0)$ ، $B(-2,1)$ ، $C(-1,2)$	ج $A(-7,1)$ ، $D(-3,1)$
٣ $A(2,3)$ ، $B(-2,3)$ ، $C(-8,7)$	٢ $A(3,3)$ ، $B(5,9)$
	ج $A(-7,1)$ ، $D(-3,1)$
(٣) أثبت أن النقط $A(2,1)$ ، $B(2,3)$ ، $C(4,1)$ تقع على الدائرة التي مركزها $M(1,2)$ وأوجد مساحتها	(٦) أثبت أن الشكل $ABCD$ معين وأوجد مساحة سطحه:
(٤) أوجد قيمة $k$ في كل من :-	١ $A(2,5)$ ، $B(2,2)$
١ $A(2,-1)$ ، $B(7,1)$ $AB = 5$	ج $A(-2,1)$ ، $D(2,6)$
وحدات وحدة طول	٢ $A(1,2)$ ، $B(4,5)$
	ج $A(3,0)$ ، $D(-2,2)$
	٣ $A(-2,1)$ ، $B(4,3)$
	ج $A(-3,-4)$ ، $D(-8,1)$



(٧) أثبت أن  $\Delta$   $abc$  مستطيل وأوجد

مساحته

(١١) أثبت أن  $\Delta$   $abc$  مستطيل وأوجد

مساحته

- ١  $a(4,1)$  ،  $b(-1,-2)$  ،  $c(2,-3)$
- ٢  $a(-2,4)$  ،  $b(-5,-3)$  ،  $c(0,2)$
- ٣  $a(1,4)$  ،  $b(4,8)$  ،  $c(5,1)$

- ١  $a(1,0)$  ،  $b(4,5)$
- $c(8,1)$  ،  $s(-3,4)$
- ٢  $a(-1,3)$  ،  $b(5,1)$
- $c(6,4)$  ،  $s(0,6)$

(٨) أثبت أن الشكل  $abc$  متوازي أضلاع

في كلاً من :

(١٢) إذا كان  $a(-1,-1)$  ،  $b(3,-1)$  أثبتأن  $c(4,-1)$  تقع على محور  $\overline{ab}$ 

- ١  $a(2,1)$  ،  $b(2,5)$
- $c(5,7)$  ،  $s(4,4)$
- ٢  $a(2,1)$  ،  $b(5,7)$
- $c(8,3)$  ،  $s(4,-8)$

(١٣) إذا كان يمر بنقطة  $a(3,6)$  $c(3,1)$  ،  $s(-3,7)$  أثبت أن تقع على محور  $\overline{ac}$ 

(١٤) الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمر

بالنقطة  $(3, -4)$  أوجد طول نصف قطرها ومحيط الدائرة(٩) اثبت أن  $\Delta$   $abc$  متساوي الساقين في

كلًا من :

(١٥)  $abc$  مربع وكان $a(2,3)$  ،  $c(-2,7)$  أوجد طول  $\overline{bc}$ 

- ١  $a(2,5)$  ،  $b(0,4)$  ،  $c(3,3)$
- ٢  $a(1,3)$  ،  $b(0,1)$  ،  $c(-1,4)$
- ٣  $a(2,-4)$  ،  $b(-4,-5)$  ،  $c(-3,1)$

(١٦)  $abc$  مربع فيه $b(2,-4)$  ،  $c(-2,-8)$  أوجد مساحته(١٠) حدد نوع  $\Delta$   $abc$  بالنسبة لأضلاعه

- ١  $a(2,5)$  ،  $b(-1,1)$  ،  $c(-4,5)$
- ٢  $a(2,5)$  ،  $b(-4,-3)$  ،  $c(-10,5)$
- ٣  $a(1,2)$  ،  $b(-3,-2)$  ،  $c(-4,3)$



## إحداثي نقطة المنتصف

## الدرس الرابع



$$* \text{ إحداثي نقطة منتصف } \overline{AB} = \left( \frac{\text{مجموع السينات}}{2}, \frac{\text{مجموع الصادات}}{2} \right) = \left( \frac{س_1 + س_2}{2}, \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right) = ج$$

$$* ج \text{ المنتصف} = \frac{أ + ب}{2} \Leftarrow \begin{matrix} \text{أ الطرف} \\ \text{ب الطرف} \end{matrix} = ج - 2$$

$$\text{ب الطرف} = ج - 2$$

\* إحداثي احدى نقطتي الطرف =  $2 \times \text{نقطة المنتصف} - \text{نقطة الطرف الأخرى}$

(١) إذا كان أ (٥، ٢) ، ب (١، ٤) ، ج (٦، ١) أوجد إحداثي نقطة منتصف كلٍّ من  $\overline{AB}$  ،  $\overline{BC}$  ،  $\overline{AC}$

الحل

$$\text{إحداثي نقطة المنتصف} = \left( \frac{\text{مجموع السينات}}{2}, \frac{\text{مجموع الصادات}}{2} \right)$$

$$\text{إحداثي منتصف } \overline{AB} = \left( \frac{١+٥}{2}, \frac{٤+٢}{2} \right) = (٣, ٣)$$

$$\text{إحداثي منتصف } \overline{BC} = \left( \frac{١-١}{2}, \frac{٦+٤}{2} \right) = (٠, ٥)$$

$$\text{إحداثي منتصف } \overline{AC} = \left( \frac{١-٥}{2}, \frac{٦+٢}{2} \right) = (٢, ٤)$$

(٢) إذا كان ج (-١، ٠) منتصف  $\overline{AB}$  حيث أ (٣، ٤) أوجد إحداثي نقطة ب  
الحل

$$\left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = ج$$

$$\left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = (-١, ٠)$$

$$٠ = \frac{٣ + x_2}{2} \quad ١ - = \frac{٣ + y_2}{2}$$

$$٠ = \frac{٣ + x_2}{2} \quad ٢ - = ٣ + y_2$$

$$٤ - ٠ = ٣ + x_2 \quad ٣ - ٢ - = y_2$$

$$٤ - = ٣ + x_2 \quad ٥ - = y_2$$

$$\therefore ب = (-٥, ٤)$$

حل آخر

\* نقطة الطرف = ٢ × المنتصف - الطرف المعلوم

$$ب = ٢ج - أ$$

$$ب = ٢(-١, ٠) - (٣, ٤) = (-٢, ٠) - (٣, ٤) = (-٥, ٤)$$

$$ب = (-٥, ٤) = (-٢, ٠) - (٣, ٤)$$

(٣) دائرة مركزها م (٣، ٧) ،  $\overline{AB}$  قطر فيها حيث أ (٤، ١) أوجد إحداثي ب  
الحل

∴ منتصف  $\overline{AB}$

$$\therefore ب = ٢م - أ$$

$$ب = ٢(٣, ٧) - (٤, ١)$$

$$ب = (٦, ١٤) - (٤, ١) = (٢, ١٣)$$





(٤) إذا كان أ (٣،١) ، ب (٥،٣) ، ج (٧،٢) ، د (٤،٢) أثبت أن أ ب ج د متوازي أضلاع

الحل

$$\text{منتصف القطر } \overline{أج} = \left( \frac{٧+٣}{٢}, \frac{٢+١}{٢} \right) = \left( \frac{٩}{٢}, \frac{١}{٢} \right)$$

$$\text{منتصف القطر } \overline{ب د} = \left( \frac{٤+٥}{٢}, \frac{٢+٣}{٢} \right) = \left( \frac{٩}{٢}, \frac{١}{٢} \right)$$

∴ منتصف القطر  $\overline{أج}$  = منتصف القطر  $\overline{ب د}$

∴ القطران ينصف كل منهما الآخر

∴ الشكل أ ب ج د متوازي أضلاع

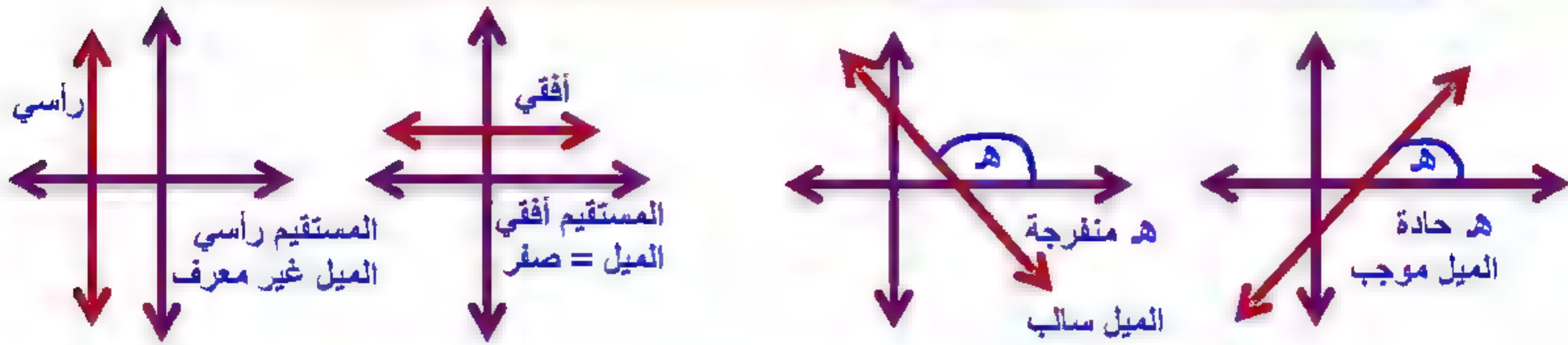
## نـمـائـنـ

(١)	أوجد منتصف $\overline{أ ب}$ حيث أ (٢،٥) ، ب (٢،١)
(٢)	$\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة ٢ حيث أ (٧،٣) ، ب (٣،١) أوجد إحداثي م
(٣)	$\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة ٢ حيث ٢ (٥،٤) ، أ (١،٢) أوجد إحداثي ب
(٤)	$\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة ج حيث ج (٠،٥) ، ب (١،٣) أوجد إحداثي أ
(٥)	أ ب ج د متوازي أضلاع فيه أ (٥،١) ، ج (٩،٣) أوجد نقطة تقاطع القطرين
(٦)	أ ب ج د معين ونقطة تقاطع قطريه ٢ (٥،٢) وكان ب (٢،٤) أوجد إحداثي النقطة د
(٧)	إذا كان أ (٢،٤) ، ب (٥،٣) ، ج (٧،٤) ، د (١٠،١) أثبت أن أ ب ج د متوازي أضلاع
(٨)	أ ب ج د متوازي أضلاع فيه أ (٥،٠) ، ب (١،١) ، ج (٢،٤) أوجد إحداثي نقطة تقاطع القطرين وإحداثي الرأس د



## ميل الخط المستقيم

## الدرس الخامس



## حالات إيجاد ميل الخط المستقيم

الميل

الحالة المعطاة

$$م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$$

$$م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

١ من نقطتين

$$(س_1, ص_1) \text{ و } (س_2, ص_2)$$

٢ من زاوية قياسها  $هـ$  يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب  $م = \text{ظ}هـ$  لمحور السينات

٣ من معادلة المستقيم

$$ص = أ س + ج$$

$$م = أ \text{ معامل س}$$

$$ج = \text{الجزء المقطوع من محور الصادات}$$

٤ من معادلة المستقيم

$$أس + ب ص + ج = ٠$$

$$م = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$$

$$م = \frac{أ}{ب}$$





(١) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (١، ٣) أ ، ب (٤، ٥) ١

(٢) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (٧، ٠) أ ، ب (٥، -٢) ٢

(٣) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٣) أ ، ب (٧، ٣) ٣

١ ص - ٧ س + ٥ = ١

٢ ص =  $\frac{1}{3}$  س

٣ ص = ٣ - س

٤ ٢ ص = ٦ س - ٤

الحل

٢ معامل س

١ ص = ٧ س + ٥

٢ = ٧ ، ٥ = ج

٢ ص =  $\frac{1}{3}$  س

٢ =  $\frac{1}{3}$  ، ٥ = ج

٣ ص = ٣ - س

٣ = ٣ ، ١ = ج

٢ ص = ٦ س - ٤

٤ ص = ٣ س - ٢

٢ = ٣ ، ٢ = ج

الحل

$$\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = ٢$$

$$٢ = \frac{١ - ٤}{٣ - ٥} = ٢$$

$$٦ = \frac{٧ - ٥}{١ - ٢} = ٢$$

$$\frac{٥}{٣} = \frac{٢ - ٧}{٣ - ٣} = ٢ \text{ غير معرف}$$

(٢) أوجد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات حيث

٣٠ = ه ، ٦٠ = ه ، ١٢٠ = ه

الحل

٢ = ظاه

$$\frac{٣٧}{٣} = ٣ . ظا = ٢$$

$$٣٧ = ٦ . ظا = ٢$$

$$٣٧ - = ١٢ . ظا = ٢$$

١ ٣ س + ٥ ص = ٧

٢ ٤ س - ٢ ص + ١ = ٠

٣ ٢ ص - س + ٢ = ٠

٤ ٣ ص = ٥ - س

٥ ٢ ص + ٣ = ٠

٦ ٧ س - ٢ = ٠

## تدريبات

## الحل

(٥) أكمل ما يأتي :-

$$م = \frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$$

$$٣س + ٥ص = ٧$$

$$م = \frac{٣-}{٥}$$

$$٢$$

$$٤س - ٢ص + ١ = ٠$$

$$م = \frac{٤-}{٢} = ٢ \leftarrow ٢ = ٢$$

$$٣$$

$$٢ص - س + ٢ = ٠$$

$$م = \frac{١-}{٢}$$

$$٤$$

$$٢ص - ٥ = س$$

$$س = ٢ص + ٥$$

$$م = \frac{١-}{٣}$$

$$٥$$

$$٢ص + ٣ = ٠$$

$$٢ = \text{صفر}$$

لاحظ معامل س = ٠

$$٧س - ٢ = ٠$$

$$م = \frac{٧-}{٠}$$

م غير معرف

لاحظ معامل ص = ٠



١ ميل المستقيم المار بالنقطتين (١، ٥) ،

(٦، ٢) هو .....

٢ ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣، -٢) ،

(٤، ٠) هو .....

٣ ميل المستقيم المار بالنقطتين (٤، ٧) ،

(٣، ٧) هو .....

٤ ميل المستقيم الذي يصنعها قياسها ٤٥° مع

الاتجاه الموجب لمحور السينات .....

٥ ميل المستقيم الذي يصنعها قياسها ١٥٠° مع

الاتجاه الموجب لمحور السينات .....

٦ ميل المستقيم ص = ٣س + ٥ هو .....

والجزء المقطوع من محور الصادات هو

وحدة طول .....

٧ ميل المستقيم ص = ٢س - ٦ هو .....

والجزء المقطوع من محور الصادات هو

وحدة طول .....

٨ ميل المستقيم ٢ص = ١٠س - ١٤ هو

..... والجزء المقطوع من محور الصادات

هو ..... وحدة طول

٩ ميل المستقيم ٢س + ص + ١ = ٠ هو

.....

١٠ ميل المستقيم ٢س + ٣ص = ٠ هو .....

١١ ميل المستقيم ٢ص - ٧س + ٥ = ٠ هو

.....



## شرط التوازي للمستقيمين

(١)  $l_1 \parallel l_2$  إذا كان  
 $m_1 = m_2$  والعكس

(٢)  $l_1 \perp l_2$  إذا كان  
 $m_1 \times m_2 = -1$  والعكس

(١) اثبت أن المستقيمان

$$l_1: 6s - 3ص + 1 = 0$$

$$l_2: 2ص + 1 = 0$$

متوازيان  
الحل

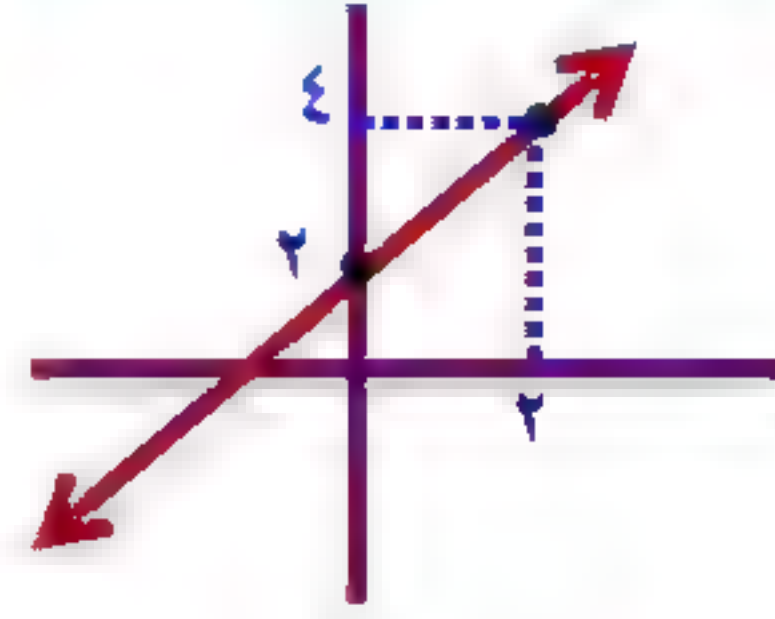
$$m_1 = \frac{-6}{-3} = \frac{\text{معامل } s}{\text{معامل } ص} = 2$$

$$m_2 = \text{معامل } s = 2$$

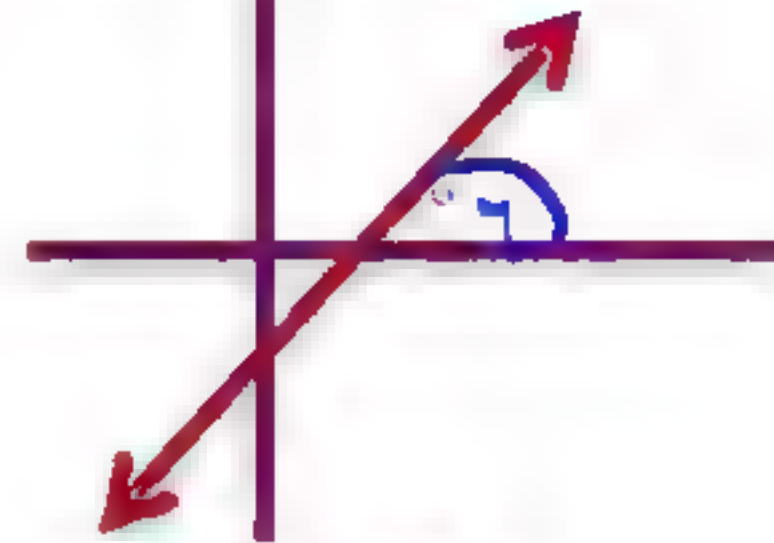
$$m_1 = m_2$$

$$\therefore l_1 \parallel l_2$$

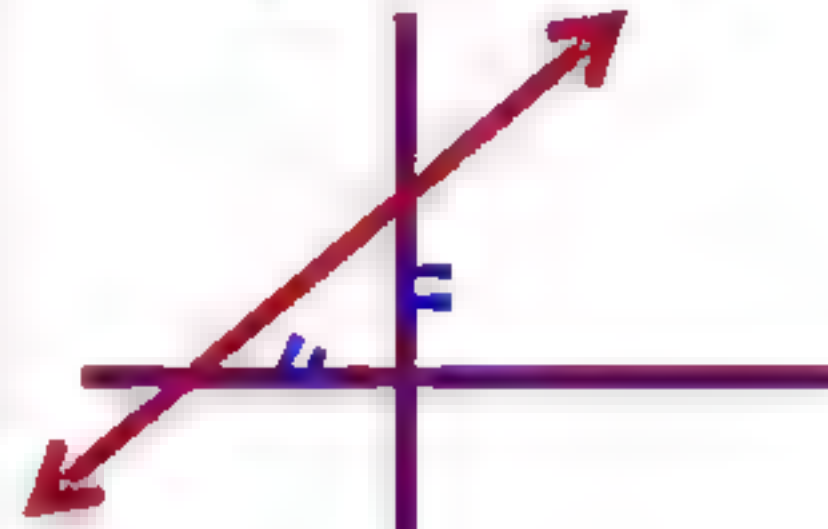
(٦) أوجد ميل المستقيمتين في الأشكال الآتية :-



١



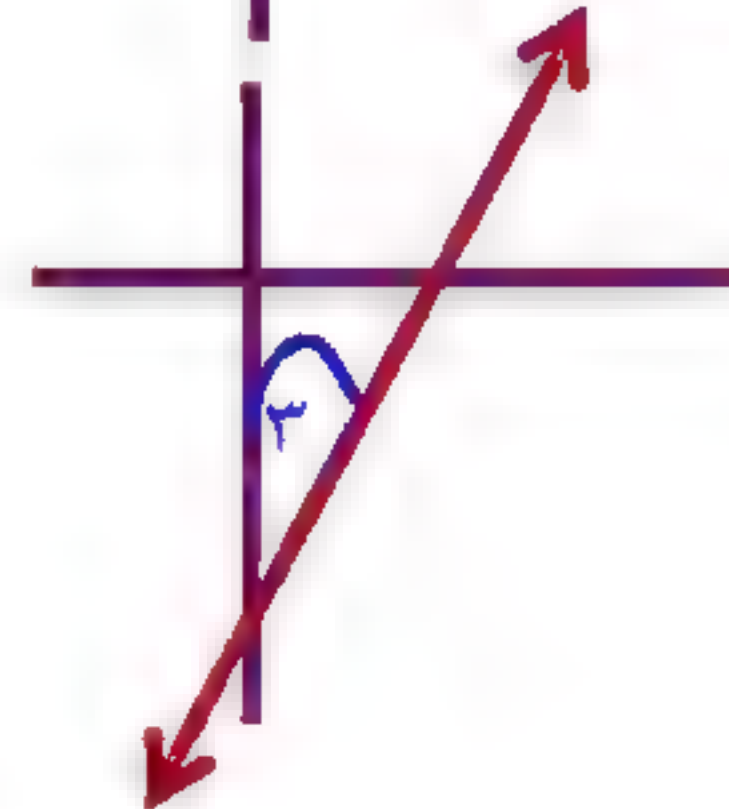
٢



٣



٤



٥

(٤) أوجد قيمة ه التي تجعل المستقيمان

$$ل: ٤س - ٥ص + ١ = ٠$$

$$٢ل: هس + ٨ص = ٠$$

متعامدان

الحل

$$\frac{٤}{٥} = \frac{٤-}{٥-} = ١,٢$$

$$\frac{٥-}{٨} = ٢,٢$$

$$١- = ٢,٢ \times ١,٢ = ٢,٢ \perp ١- \text{ ويكون}$$

$$\frac{١-}{٢,٢} = ١,٢$$

$$\frac{٨}{٥} = \frac{٤}{٥}$$

$$١٠ = \frac{٨ \times ٥}{٤} = ه$$

(٥) أثبت أن النقط أ (٣-٤) ،

ب (٢-٤) ، ج (١٤٣)

تقع على استقامة واحدة

الحل

$$١ = \frac{٣+٢-}{١+٠} = \overline{أب}, ١,٢$$

$$١ = \frac{٢+١}{٠-٣} = \overline{بج}, ٢,٢$$

$$٢,٢ = ١,٢$$

$$\therefore \overline{أب} \parallel \overline{بج}$$

$\therefore$  ب نقطة مشتركة

$\therefore$  أ، ب، ج تقع على استقامة واحدة

(٢) اثبت أن المستقيمان

$$ل: ٣س - ص + ٢ = ٠$$

$$٢ل: س + ٣ص + ٧ = ٠$$

متعامدان

الحل

$$٣ = \frac{٣-}{١-} = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = ١,٢$$

$$٣ = \frac{١-}{٣} = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = ٢,٢$$

$$١- = \frac{١-}{٣} \times ٣ = ٢,٢ \times ١,٢ = ١- \text{ الشرط}$$

$$\therefore ل \perp ٢ل$$

(٤) أوجد قيمة ك التي تجعل المستقيمان

$$ل: ٥س + كص = ٤$$

$$٢ل: ٢س + ٦ص = ٧$$

متوازيان

الحل

$$\frac{٥-}{٤} = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = ١,٢$$

$$\frac{١-}{٣} = \frac{٢-}{٦} = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = ٢,٢$$

$$\therefore ل \parallel ٢ل$$

$$\therefore ٢,٢ = ١,٢$$

$$\frac{١-}{٣} = \frac{٥-}{٤}$$

$$١٥ = \frac{٣ \times ٥-}{١-} = ك$$





(٧) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين  
(٤، ١) ، (٦، ٣) يوازي المستقيم الذي يصنع  
زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور  
السينات

الحل

(٦) أوجد قيمة س التي تجعل النقط  
أ (٢، ١) ، ب (٢، ٣) ، ج (٤، ٣)  
على استقامة واحدة

الحل

$$\text{ميل } \overline{AB} = \frac{3-2}{1-2} = \frac{3+2}{1+2}$$

$$\text{ميل } \overline{AJ} = \frac{3-2}{1-4} = 1-$$

∴ أ، ب، ج على إستقامة واحدة

$$\therefore \text{ميل } \overline{AB} = \text{ميل } \overline{AJ}$$

$$1- = \frac{3-2}{1-4}$$

$$3- = 2- = 3$$

$$1- = 2+3- = 3$$

(٧) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين  
(٢، ٣) ، (٣، ٢) يوازي المستقيم الذي  
يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب  
لمحور السينات

الحل

$$\text{ميل } \overline{AB} = \frac{3-2}{2-3} = 1$$

$$\text{ميل } \overline{AC} = \text{ظل } 60^\circ = 1$$

$$\therefore \text{ميل } \overline{AB} = \text{ميل } \overline{AC}$$

∴ المستقيمان متوازيان

ميل المستقيم وميل  
الموازي له وميل  
العمودي عليه

ميل المستقيم	ميل الموازي له	ميل العمودي عليه
$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{2-}{7}$
$2-$	$2-$	$\frac{1-}{2}$
$1-$		
$\frac{1-}{3}$		
$5$		
$3\sqrt{2}$		
$1$		
$1-$		
صفر		



## نمارين

(١) أوجد ميل كلاً مما يأتي

أ  $(-٤، ١)، (٢، ٣)$  هو .....ب  $(-٤، ١)، (٤، -٨)$  هو .....ج  $(١، ٣)$ ، نقطة الأصل هو .....

(٢) ميل المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها

أ  $٣٠^\circ$  هو .....ب  $٦٠^\circ$  هو .....ج  $٤٥^\circ$  هو .....د  $١٣٥^\circ$  هو .....هـ  $١٢٥^\circ$  هو .....

(٣) أوجد ميل كلاً مما يأتي

أ  $٣س + ص = ٧$  هو .....ب  $٤س - ص - ٢ = ٠$  هو .....ج  $٣س + ص = ٠$  هو .....د  $ص = ٤ - س$  هو .....هـ  $ص = ٧ - س$  هو .....و  $٢ص = ٥س - ٢$  هو .....

(٤) ميل المستقيم الأفقي .....

(٥) ميل المستقيم الرأسي .....

(٦) ميل محور السينات .....

(٧) ميل محور الصادات .....

(٨) ميل العمودي على محور السينات .....

(٩) ميل العمودي على محور الصادات .....

(١٠) حاصل ضرب ميلي المستقيمين

المتعامدين .....

(١١) حاصل ضرب ميلي قطري المربع .....

(١٢) ميلي ضلعين متقابلين في المستطيل

.....

(١٣) أ ب ج د مربع فيه أ  $(٢، ٣)$  ، ب  $(٣، ٠)$ 

فإن ج د ميل = ..... ، ميل ب ج = ..... =

(١٤) إذا كان  $\frac{٣}{٢}$ ،  $\frac{٣}{٢}$  ميلا مستقيمين متوازيين

فإن ك = .....

(١٥) إذا كان  $\frac{٣}{٢}$ ،  $\frac{٣}{٢}$  ميلا مستقيمين متوازيين

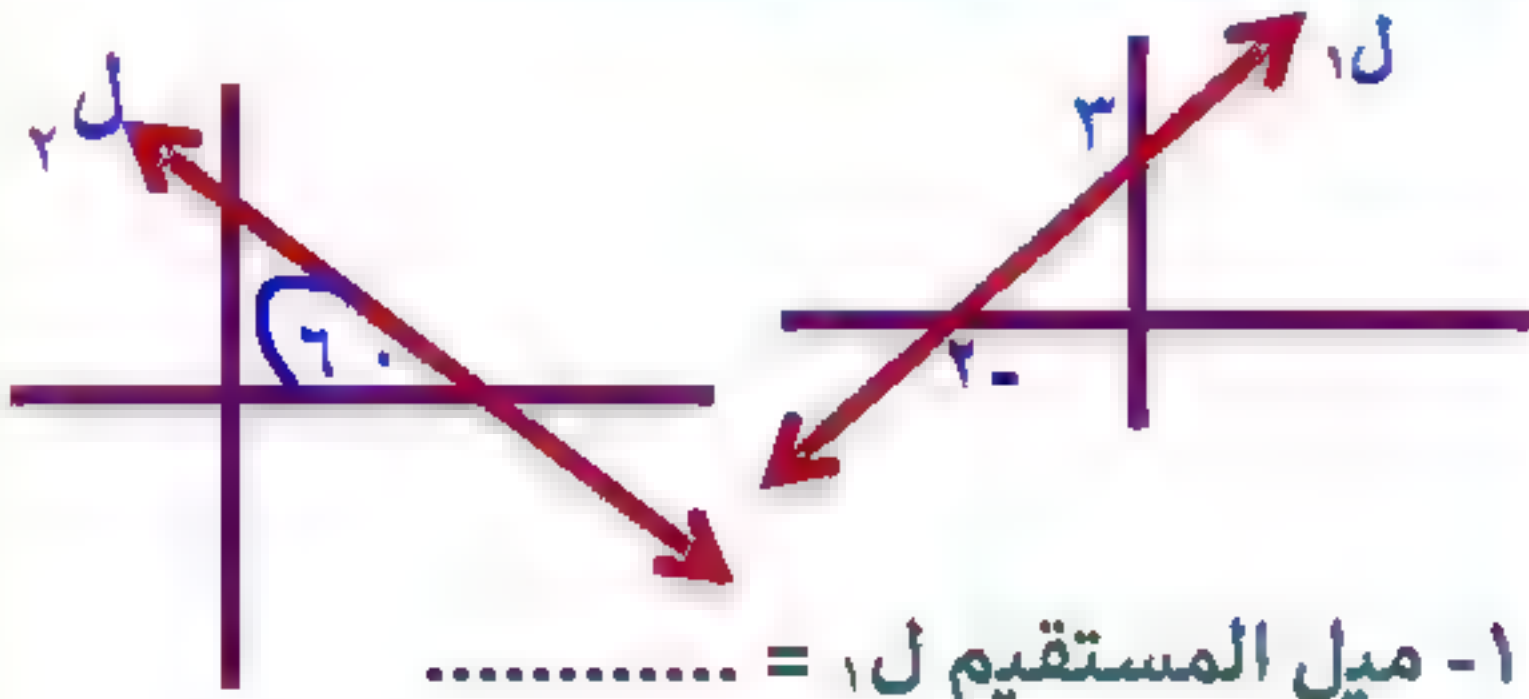
فإن أ = .....

(١٦) إذا كان  $\frac{٤}{٣}$ ،  $\frac{٤}{٣}$  هو ميلا مستقيمين

متعامدين فإن ك = .....



(٢١) ميل المستقيم الأفقي .....



١- ميل المستقيم  $l_1$  = .....

٢- ميل المستقيم  $l_2$  = .....

(٢٢) إذا كان  $l_1 // l_2$

$l_1$  : ك س + ٢ ص = ٧

$l_2$  : ٢ س + ص - ١ = ٠

أوجد قيمة ك

(٢٣) أوجد قيمة أ التي تجعل المستقيمان

متعامدان

$l_1$  : ٢ س - ص + ٥ = ٠

$l_2$  : أ س + ص = ٠

أوجد قيمة أ

(٢٤) إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين

(١ ، ٢) ، (س ، ٤) هو ٣ أوجد س

(٢٥) إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين

(١ ، ٣) ، (٣ ، س) هو -٢ أوجد س

(٢٦) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين

(٤ ، ٣) ، (٥ ، ٢) عمودي على المستقيم

الذي يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الاتجاه

الموجب لمحور السينات

(٢٧) أثبت

أ (١-١-١) ، ب (٢، ٣) ، ج (٦، ٠) رؤوس

مثلث قائم في ب

(١٧) المستقيم ٣ س + ص = ٤ ميله  
..... يمر بالنقطة (١ ، ....)

(١٨) المستقيم ٣ س + ٤ ص = ١٢

١- ميله = .....

٢- ميل الموازي له = .....

٣- ميل العمودي عليه = .....

٤- الجزء المقطوع من محور الصادات

.....

ومن محور السينات .....

٥- مساحة المثلث المصنوع من تقاطع

المستقيم بالمحورين هي .....

٦- محيط المثلث المصنوع من تقاطع

المستقيم بالمحورين هو .....

٧- المستقيم يصنع زاوية قياسها .....

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

(١٩) ميل  $\overline{AB} = \frac{1}{3}$  ،  $\overline{AB} \perp \overline{CD}$  فإن

ميل  $\overline{CD}$  = .....

(٢٠) ميل  $\overline{AB} = -٢$  ،  $\overline{AB} // \overline{CD}$  فإن

ميل  $\overline{CD}$  = .....



## معادلة الخط المستقيم

## الدرس السادس

\* معادلة الخط المستقيم  
بمعلومية ميله  $m$  والجزء المقطوع من محور الصادات  $j$   
$$ص = مس + ج$$

\*  $m$  نحصل عليه بالطريقة المعروفة  $ج = ص - مس$

(١) أوجد معادلة المستقيم الذي

١- ميله  $= ٥$  ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٣ وحدات

٢- ميله  $= -\frac{1}{٢}$  ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٦ وحدات

الحل

١-  $٥ = م$  ،  $٣ = ج$   $\therefore$  المعادلة :  $ص = ٥س + ٣$

٢-  $-\frac{1}{٢} = م$  ،  $٦ = ج$   $\therefore$  المعادلة :  $ص = -\frac{1}{٢}س + ٦$

(١) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ١) ، (٦ ، ٤) ويقطع معه الجزء الموجب لمحور الصادات وحدتين

الحل

$$\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = م$$

١-  $٣ = م$  ،  $٢ = ج$

$$٣ = \frac{١ - ٤}{٥ - ٦} = م$$

٢-  $\therefore$  المعادلة :  $ص = ٣س + ٢$



(٥) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين  
(٣ ، ٧) ويصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه  
الموجب لمحور السينات  
الحل

(٣ ، ٧)

ج = ص - مس	م
$3 \times 1 - 7 = ج$ $4 = ج$	٢ = ظاه ٤ = ١

∴ المعادلة : ص = س + ٤

(٦) أوجد معادلة المستقيم الذي ميله ٣-  
ويقطع من محور السينات جزء قدرة ٦-  
الحل

(٦- ، ٠)

ج = ص - مس	م
$(6-)(3-) - 0 =$ $18 - =$	٣ -

∴ المعادلة : ص = ٣س - ١٨

## تدريبات

أوجد معادلة المستقيم :-

- ١- الذي ميله ٤ ويمر بالنقطة (٣ ، ٢)
- ٢- الذي ميله ١- ويمر بالنقطة (٣ ، ٥)
- ٣- المار بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٤ ، ٠)
- ٤- المار بالنقطتين (٤ ، ٠) ، (٧ ، ٢)

(٣) أوجد معادلة المستقيم الذي  
? ميله ٧ ويمر بالنقطة (٣ ، ٤)  
ب ميله -  $\frac{1}{3}$  ويمر بالنقطة (٠ ، ١-)  
الحل

أ- (٣ ، ٤)

ج = ص - مس	م
$(7)3 - 4 = ج$ $17 - = ج$	٧

∴ المعادلة : ص = ٧س - ١٧

ب- (٠ ، ١-)

ج = ص - مس	م
$1 - = ج$ $1 - = ج$	$\frac{1-}{2}$

∴ المعادلة : ص =  $\frac{1-}{2}$ س - ١

(٤) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين  
(٤ ، ١-) ، (١- ، ٢-)  
الحل

(٤ ، ١-)

ج = ص - مس	م
$4 \times \frac{1}{0} - 1 - =$ $\frac{9-}{0} =$	$\frac{1+2-}{4-1-} = ٢$ $\frac{1}{0} = ٢$

∴ المعادلة : ص =  $\frac{1}{0}$ س -  $\frac{9}{0}$



(٩) أوجد معادلة معادلة محور تماثل  $\overline{AB}$   
حيث  $A(٥, ٣)$  ،  $B(٧, ٥)$   
الفكرة

\* نوجد إحداثي منتصف  $\overline{AB}$   
\* نوجد ميل  $\overline{AB}$  وهو ميل العمودي على  
محور التماثل المطلوب معادلته  
الحل

$$\text{منتصف } \overline{AB} = \left( \frac{٧+٥}{٢}, \frac{٥+٣}{٢} \right) = (٦, ٤)$$

$$\text{ميل } \overline{AB} = \frac{٥-٣}{٧-٥} = \frac{٢}{٢} = ١$$

∴ ميل المحور =  $-١$  لأنهما متعامدان

ج = ص - مس	م
$٤ \times (١ -) - ٦ = ج$ $١٠ = ج$	$-١$

∴ المعادلة :  $ص = -١٠ + ١$

## تدريب

أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة  
(٣ ، ٢) ويوازي المستقيم  $ص = ٥س - ١$

(٧) أوجد معادلة المستقيم الذي يمر  
بالنقطة (٢ ، ٤) ويوازي المستقيم  
 $س - ٢ص + ١ = ٠$

الحل

(٢ ، ٤)

ميل المستقيم المعلوم =  $\frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

$$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} =$$

∴ ميل المستقيم المطلوب =  $\frac{١}{٢}$  لأنهما

متوازيان

ج = ص - مس	م
$٢ \times \frac{١}{٢} - ٤ = ج$ $٣ = ج$	$\frac{١}{٢}$

∴ المعادلة :  $ص = \frac{١}{٢}س - ٣$

(٨) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة  
(٤ ، ٢) وعمودي على المستقيم

$$ص = \frac{١}{٢}س + ٣$$

الحل

(٤ ، ٢)

ميل المستقيم المعلوم =  $\frac{١}{٢}$

∴ ميل المستقيم المطلوب =  $-٢$  لأنهما

متعامدان

ج = ص - مس	م
$(٤ - \times ٢) - ٢ = ج$ $٦ = ج$	$-٢$

∴ المعادلة :  $ص = -٢س - ٦$



## ملاحظات

- (١) معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل و (٠ ، ٠) هي  $ص = م س$
- (٢) معادلة محور السينات  $ص = صفر$
- (٣) معادلة محور الصادات  $س = صفر$
- (٤) معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة (ا،ب) هي  $ص = ب$
- (٥) معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (ا،ب) هي  $س = ا$
- (٦) معادلة المستقيم عند معلومية الأجزاء المقطوعة من المحورين  $١ = \frac{ص}{ب} + \frac{س}{ا}$  حيث ا الجزء المقطوع من السينات ، ب الجزء المقطوع من الصادات

## (١) أكمل ما يأتي

- ١- معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وميله  $= ٥$  هي .....
- ٢- معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وميله  $= \frac{١}{٢}$  هي .....
- ٣- معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، ٥) ويوازي محور السينات هي .....
- ٤- معادلة المستقيم المار بالنقطة (-١ ، -٦) ويوازي محور الصادات هي .....
- ٥- معادلة المستقيم الذي يقطع من المحورين السيني والصادي على الترتيب جزئين مقطوعين مقدارهما ٦ ، ٤ هي .....
- ٦- المستقيم الذي معادلته  $ص = ٧$  يوازي محور .....
- ٧- المستقيم الذي معادلته  $٢س = ٥$  يوازي محور .....



## نمارين

(١) فى كل مما يأتى أوجد معادلة المستقيم الذى

١- يمر بالنقطة (٣ ، ٢) وميله  $\frac{1}{3}$

٢- يمر بالنقطة (١- ، ٤) وميله ٥

٣- يمر بالنقطة (١- ، ٣-) وميله ٢-

٤- يمر بالنقطة (٣ ، ١) ويصنع زاوية  $45^\circ$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

٥- يمر بالنقطة (٠ ، ٢-) ويصنع زاوية قياسها  $135^\circ$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

٦- يمر بالنقطتين (٥ ، ١) ، (٤ ، ٠)

٧- يمر بالنقطتين (٣- ، ١-) ، (٤- ، ٥-)

٨- يمر بالنقطتين (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٤)

٩- يمر بالنقطة (٥ ، ١) موازياً للمستقيم  $3x + y = 4$

١٠- يمر بالنقطة (٠ ، ٧) موازياً للمستقيم  $2x + y = 5$

١١- يمر بالنقطة (٣ ، ١) موازياً للمستقيم  $2x + 6y = 4$

١٢- يمر بالنقطة (٢ ، ١) وعمودياً على المستقيم  $\frac{1}{3}x + y = 3$

١٣- يمر بالنقطة (٣ ، ٢-) وعمودياً على المستقيم  $5x + y = 7$

١٤- يمر بالنقطة (٥ ، ٤) وعمودياً على المستقيم  $3x - y = 1$

١٥- يمر بالنقطة (٣ ، ١-) ويوازي المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٠) ، (٣ ، ٢)

١٦- يمر بالنقطة (٠ ، ٤) وعمودي على المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ١-)

١٧- يمر بالنقطة (٣ ، ١) ويوازي محور السينات

١٨- يمر بالنقطة (٥ ، ١-) ويوازي محور الصادات

١٩- يمر بالنقطة الأصل وميله  $45^\circ$

٢٠- أوجد معادلة معادلة محور تماثل  $\overline{AB}$  حيث  $A(5, 1)$  ،  $B(3, -3)$